ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 11/06/2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1 .Απόδειξη σελίδα 99 σχολικό
Α2. α. Ψ
β. Σελίδα 35
Α3. Θεωρία σελίδα 216
Α4. α) Λάθος
β) Λάθος
γ) Σωστό
δ) Σωστό
ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.
Η f είναι παραγωγίσιμη στο R^* ως διαφορά παραγωγίσιμων με

$$f'(x)=\frac{x\left(x^3+8\right)}{x^4}$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	$\|$	$+$	
x^3+8		$-$		$+$	$\|$	$+$	
$f'(x)$		$+$		$-$	$\|$	$+$	
$f(x)$		$\uparrow$	TM	$\downarrow$	$\|$	$\uparrow$	

ΚΥΚΛΟΣ

Η f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-2]$ και $(0,+\infty)$ και f γνησίως φθίνουσα στο $[-2,0)$. Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο -2 το $f(-2)=-3$.

Β2.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο R^* ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=1+\frac{8}{x^3}$. $f''(x)=\frac{-24}{x^4}<0$ για κάθε $x\in R$. Άρα

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$\|$	$-$	
$f(x)$		$\cap$	$\|$	$\cap$	

Δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

Β3

<u>Κατακόρυφη ασύμπτωτη</u> στο $x_0=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=-\infty$$

Ομοίως $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=-\infty$ άρα έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=0$ στο $-\infty$.

<u>Πλάγια ασύμπτωτη</u>:

Στο $-\infty$:

$$\lambda=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}(1-\frac{4}{x^3})=1$$

$$\beta=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=0$$

Άρα η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Στο $+\infty$:

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{4}{x^3})=1$$

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=0$$

Άρα η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

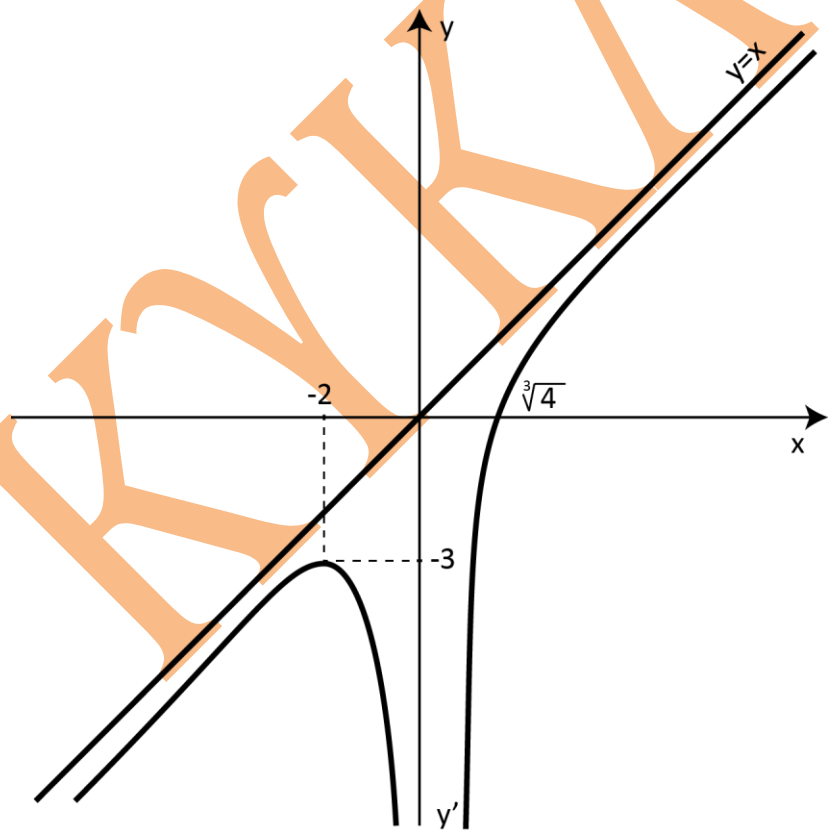
B4

Έχουμε : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x - \dfrac{4}{x^2}\right) = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - \frac{4}{x^2}\right) = +\infty.$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		+		−	‖	+	
$f''(x)$		−		−	‖	−	
$f(x)$			-3		$-\infty$ ‖ $-\infty$		$+\infty$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι:



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Τα μήκη είναι x και $8-x$.

Έχουμε $l=8-x \Leftrightarrow 2\pi\rho=8-x \Leftrightarrow \rho=\dfrac{8-x}{2\pi}m$, $0<x<8$.

Με μήκος x κατασκευάζουμε τετράγωνο πλευράς $\dfrac{x}{4}$ m και με ακτίνα $\rho=\dfrac{8-x}{2\pi}m$ κατασκευάζουμε κύκλο περιμέτρου $l=8-x$. Έχουμε

$\text{Ε}\tau=\dfrac{x^2}{16}m^2$, $x\in(0,8)$ και $\text{Ε}\kappa=\pi\rho^2=\dfrac{\pi(8-x)^2}{4\pi^2}=\dfrac{(8-x)^2}{4\pi}m^2$.

Οπότε έχουμε :

$$E=\frac{x^2\pi+4(8-x)^2}{16\pi}=\frac{x^2+4(64-16x+x^2)}{16\pi}=\frac{x^2(4+\pi)-64x+256}{16\pi}m^2 \ , x\in(0,8)$$

Γ2.

Έχουμε ότι $\delta=\dfrac{8-x}{\pi}m$ οπότε $\text{Ε}'(x)=\dfrac{2(\pi+4)x-64}{16\pi}=\dfrac{(\pi+4)x-32}{8\pi}$.

$$E'(x)=0 \Leftrightarrow (\pi+4)x=32 \Leftrightarrow x=\frac{32}{\pi+4}$$

x	0		$\frac{32}{\pi+4}$		8
$f'(x)$	‖	-	0	+	‖
$f(x)$	‖	↓	$O.E$	↑	‖

Για την πλευράς του τετραγώνου έχουμε $\dfrac{x}{4}=\dfrac{8}{\pi+4}$ (1) και

$\delta=\dfrac{8-\frac{32}{\pi+4}}{\pi}=\dfrac{8\pi+32-32}{\pi(\pi+4)}=\dfrac{8}{\pi+4}$ (2) . Συνεπώς από (1) και (2) ισχύει το ζητούμενο.

Γ3. Έχουμε $E(x)=5$.

Θα δείξουμε ότι η $y=5$ και η $E(x)$ έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+} E(x)=\dfrac{16}{\pi}$,

$$E\left(\frac{32}{\pi+4}\right)=\frac{\dfrac{32^2}{\pi+4}-\dfrac{64\cdot 32}{\pi+4}+256}{16\pi}=\frac{32(32-64)+265(\pi+4)}{16\pi(\pi+4)}=$$

$$=\frac{256\pi}{16\pi(\pi+4)}=\frac{16}{\pi+4}.$$

Άρα $f(A_1)=\left[\dfrac{16}{\pi+4},\dfrac{16}{\pi}\right)$ το $5\in f(A_1)$. Επίσης $f(A_2)=\left[\dfrac{16}{\pi+4},4\right)$ και

$$\lim_{x\to 8^-} E(x)=\frac{(\pi+4)64-64\cdot 8+256}{16\pi}=4.$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1

f συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων οπότε:

$$f'(x)=\left(2e^{x-\alpha}-x^2\right)'=2e^{x-a}-2x$$

$$f''(x)=\left(2e^{x-\alpha}-2x\right)'=2e^{x-\alpha}-2x \text{ και}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow 2\left(e^{x-\alpha}-1\right)=0\Leftrightarrow e^{x-a}=e^0\Leftrightarrow x=\alpha.$$

$$f^{(3)}(x)\left(2e^{x-\alpha}-2\right)'=2e^{x-\alpha}>0$$

x	$-\infty$		α		
$f^{(3)}(x)$		+		+	
$f''(x)$		↑		↑	
$f''(x)$		-		+	
$f(x)$		∩	ΣΚ		∪

Άρα η f έχει μοναδικό σημείο καμπής $A\left(\alpha,2-\alpha^2\right)$.

Δ2. Έχουμε $f'(x)=2\left(e^{x-\alpha}-x\right)$ και $f''(x)=e^{x-\alpha}$, $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=\alpha$.

Μοναδικό.

Έχουμε $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=+\infty \\ f'(\alpha)=2(1-x)\end{array}\right\} \Rightarrow f'(A_1)=\left[2(1-\alpha),+\infty\right)$

με $\alpha>1$ έχουμε ότι $2(1-\alpha)<0$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_1\in(-\infty,\alpha)$ ώστε $f'(x_1)=0$.

επίσης

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\dfrac{2e^{x-\alpha}}{x^2}-1\right) \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{x-\alpha}}{x^2}\overset{DLH}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{x-\alpha}}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-\alpha}=+\infty\end{array}\right\} \Rightarrow f(A_2)=\left[2(1-\alpha),+\infty\right)$$

Άρα υπάρχει μοναδικό $x_2\in(\alpha,+\infty)$ ώστε $f'(x_2)=0$.

Συνεπώς :

x	$-\infty$		x_1		α		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-		-	0	+	
$f(x)$		↑		↓		↓		↑	

Δ3

Έστω ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,x_2)$ τ.ω $f(x_0)=f(1)$ επειδή $f\downarrow$ στο $[\alpha,x_2]$ είναι ΄΄1-1΄΄ οπότε $x_0=1$ ΑΤΟΠΟ.

Δ4

Έχουμε $f(x)=2e^{x-2}-x^2,\ x\in[2,3]$

Έχουμε f κυρτή στο $[2,3]$. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(2,f(2))$ είναι : $y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y=-2x+2$

Αφού η f είναι κυρτή στο $[2,3]$ τότε ισχύει $f(x)\geq -2x+2$. Η ισότητα ισχύει για $x=2$, όμως $\sqrt{x-2}\geq 0$ οπότε :

$$f(x)\cdot\sqrt{x-2}\geq(-2x+2)\sqrt{x-2}.$$

Συνεπώς,

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > \int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx$$

Έχουμε : $\int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx = -2\int_2^3 (x-1)\sqrt{x-2}\,dx$

Θέτω $x-2=t \Leftrightarrow x=t+2$ τότε $dx=dt$ και $\begin{matrix} x=2, t=0 \\ x=3, t=1 \end{matrix}$

Οπότε έχουμε :

$\int_0^1 -2(t+1)\sqrt{t}\,dt = -2\int_0^1 \left(t\sqrt{t}+\sqrt{t}\right)dt = -\dfrac{32}{15}$. Οπότε προκύπτει το ζητούμενο.

Επιμέλεια απαντήσεων : Μαλλιαράκης Αντώνης
Φαρσάρη Ρένια
Σπυριδάκη Νέλη
Νταγιαντάς Βασίλης

ΚΥΚΛΟΣ