2ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι : « Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ΄ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$ τότε : $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta)-G(\alpha)$ »

Β. Διατυπώστε το θεώρημα μέγιστης και ελαχίστης τιμής .

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

α) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

β) Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη σ΄αυτό .

γ) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

δ) Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$ τότε ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\gamma^\alpha f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$.

ε) Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha) < f(\beta)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) > 0$.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

Α .Σχολικό Βιβλίο σελίδα 216
Β. Σχολικό Βιβλίο σελίδα 77
Γ.α) Σ, β) Λ, γ) Σ , δ) Λ , ε) Σ. ■

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[e,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν $x^2 f''(x)\ln x + f(x) > 0$ για κάθε $x\in(e,+\infty)$ και $f(e) = 1 = f'(e)$.

α) Να δείξετε ότι :

i) $f(x) - \ln x \geq 0$ για κάθε $x\in[e,+\infty)$,

ii) $f(1821^{2018}) > 2018 f(1821)$,

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (e,e^2)$ τέτοιο ώστε $\int_e^x \frac{f(t)}{t}dt = 1$,

γ) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[e,+\infty)$,

δ) Να βρεθεί το όριο : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot f^{-1}(x)}{-2x+\eta\mu x}$.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

α) i. Έχουμε από την σχέση

$$x^2 f''(x)\ln x + f(x) > 0 \Leftrightarrow f''(x)\cdot \ln x + f'(x)\cdot \frac{1}{x} - f'(x)\cdot \frac{1}{x} + \frac{f(x)}{x^2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(f'(x)\ln x\right)' - \left(\frac{f(x)}{x}\right)' > 0 \Leftrightarrow \left(f'(x)\cdot \ln x - \frac{f(x)}{x}\right)' > 0$$

για κάθε $x > e$. Ορίζουμε συνάρτηση $F(x) = f'(x)\cdot \ln x - \frac{f(x)}{x}$ και αφού F συνεχής στο $[e,+\infty)$ ως πράξεις συνέχων συναρτήσεων και $F'(x) > 0$ έχουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $[e,+\infty)$. Οπότε για $x > e$ έχουμε

$$F(x) > F(e) \Rightarrow f'(x)\cdot \ln x - \frac{f(x)}{x} > 1 - \frac{1}{e} > 0 \underset{x\in[e,+\infty)}{\overset{\ln x>0}{\Rightarrow}} \frac{f'(x)\cdot \ln x - \frac{f(x)}{x}}{\ln^2 x} > 0 \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{\ln x}\right)' > 0$$

Ορίζουμε συνάρτηση $G(x) = \frac{f(x)}{\ln x}$ και αφού $G'(x) > 0$ για κάθε $x \in [e,+\infty)$ έχουμε ότι G γνησίως αύξουσα στο $[e,+\infty)$, άρα για κάθε

$x > e \Rightarrow G(x) > G(e) \Rightarrow \frac{f(x)}{\ln x} > \frac{f(e)}{\ln e} = 1 \Rightarrow f(x) > \ln x$. Και για $x = e$ έχουμε

$G(e) = \frac{f(e)}{\ln e} = 1$, οπότε για κάθε $x \in [e,+\infty)$ ισχύει $f(x) - \ln x \geq 0$.

ii. Ισχύει ότι

$$1821^{2018} > 1821 \overset{G\uparrow}{\Rightarrow} G\left(1821^{2018}\right) > G(1821) \Leftrightarrow \frac{f\left(1821^{2018}\right)}{\ln 1821^{2018}} > \frac{f(1821)}{\ln 1821} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f\left(1821^{2018}\right)}{2018\ln 1821} > \frac{f(1821)}{\ln 1821} \Leftrightarrow \frac{f\left(1821^{2018}\right)}{2018} > \frac{f(1821)}{1} \Leftrightarrow f\left(1821^{2018}\right) > 2018 f(1821).$$

β) Ορίζουμε συνάρτηση $H : \left[e,e^2\right] \to R$ με τύπο $H(x) = \int_e^x \frac{f(t)}{t}dt - 1$. Έχουμε ότι η συνάρτηση $\frac{f(t)}{t}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνέχων συναρτήσεων στο $\left[e,e^2\right]$, άρα και η H είναι συνεχής στο $\left[e,e^2\right]$ ως παραγωγίσιμη.

Οπότε έχουμε:

- $H(e) = \int_e^e \frac{f(t)}{t}dt - 1 = -1 < 0$
- $H\left(e^2\right) = \int_e^{e^2} \frac{f(t)}{t}dt - 1 > 0$

Διότι :

$$f(t) \geq \ln t \underset{t\in\left[e,e^2\right]}{\overset{t>0}{\Rightarrow}} \frac{f(t)}{t} \geq \frac{\ln t}{t} \Rightarrow \int_e^{e^2} \frac{f(t)}{t}dt \geq \int_e^{e^2} \frac{\ln t}{t}dt = \left[\frac{\ln^2 t}{2}\right]_e^{e^2} = \frac{\ln^2 e^2 - \ln^2 e}{2} = \frac{3}{2} > 0$$

Συνεπώς ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(e,e^2\right)$ τ.ω $\int_e^{x_0} \frac{f(t)}{t}dt = 1$.

γ) Για $x>e$ έχουμε $f'(x)\cdot \ln x-\dfrac{f(x)}{x}>0 \underset{x>e}{\overset{\ln x>0}{\Rightarrow}} f'(x)>\dfrac{f(x)}{x\cdot \ln x}>0$ αφού $f(x)\geq \ln x>0$. Άρα η $f'(x)>0$ στο $(e,+\infty)$ και συνεχής στο e, άρα η $f\uparrow \sigma\tau o[e,+\infty)$.

δ) Αφού $f\uparrow \sigma\tau o[e,+\infty)$ είναι και αντιστρέψιμη με f^{-1} επίσης γνησίως αύξουσα στο $f(D_f)=\left[f(e),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=[1,+\infty)$, (Διότι $f(x)\geq \ln x$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$).Συνεπώς προκύπτει ότι $f^{-1}:[1,+\infty)\to[e,+\infty)$ και $f^{-1}\uparrow \sigma\tau o[1,+\infty)$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)=+\infty$.

Έχουμε : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\cdot f^{-1}(x)}{-2x+\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{-2+\dfrac{\eta\mu x}{x}}=-\infty$.

Γιατί $-\dfrac{1}{x}\leq\dfrac{\eta\mu x}{x}\leq\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow -2-\dfrac{1}{x}\leq -2+\dfrac{\eta\mu x}{x}\leq -2+\dfrac{1}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2+\dfrac{1}{x}\right)=-2$ και από κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-2+\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=-2$. ■

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$ όπου $f:R\to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$ και για την οποία ισχύει η σχέση : $f(2)\cdot f(3)-f(1)\cdot f(4)=0$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x+1)\cdot f(x)=f'(x)\cdot f(x+1)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,3)$.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f''(x)\cdot f(x)=\left(f'(x)\right)^2$ έχει λύση στο $(1,4)$,

γ) Αν $0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$ να δηχθεί ότι $\dfrac{2}{\pi}<\dfrac{\eta\mu x}{x}<1$.

δ) Αν $f(x)=e^x$ να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\Omega)=\int_1^3\left|e^x-ex\right|dx$.

<u>ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ</u>

α) Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[1,3]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,3)$ ως πηλίκο συνέχων και παραγωγίσιμων συναρτήσεων . Ισχύει ότι $g(1)=\dfrac{f(2)}{f(1)}$, $g(3)=\dfrac{f(4)}{f(3)}$ και από την σχέση $f(2)\cdot f(3)-f(1)\cdot f(4)=0\Leftrightarrow\dfrac{f(2)}{f(1)}=\dfrac{f(4)}{f(3)}$. άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,3)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $g'(\xi)=0$. Η παράγωγος της g είναι

$$g'(x)=\frac{f'(x+1)\cdot f(x)-f(x+1)\cdot f'(x)}{f^2(x)}$$ άρα

$$g'(\xi)=0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi+1)\cdot f(\xi)-f(\xi+1)\cdot f'(\xi)}{f^2(\xi)}=0 \Leftrightarrow f'(\xi+1)\cdot f(\xi)=f(\xi+1)\cdot f'(\xi)$$

Δηλαδή η εξίσωση $f'(x+1)\cdot f(x)=f'(x)\cdot f(x+1)$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(1,3)$.

β) Η εξίσωση $f''(x)\cdot f(x)=\left(f'(x)\right)^2$ γράφετε ισοδύναμα

$$f''(x)\cdot f(x)=\left(f'(x)\right)^2 \Leftrightarrow f''(x)f(x)-\left(f'(x)\right)^2=0 \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} \frac{f''(x)f(x)-\left(f'(x)\right)^2}{f^2(x)}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=0$$

Ορίζουμε συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ για την οποία ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\xi,\xi+1]\subset[1,4]$ όπου ξ η λύση του ερωτήματος α)

Δηλαδή h συνεχής στο $[\xi,\xi+1]$, παραγωγίσιμη στο $(\xi,\xi+1)$ και από την εξίσωση

$$f'(\xi+1)\cdot f(\xi)=f(\xi+1)\cdot f'(\xi) \Leftrightarrow \frac{f'(\xi+1)}{f(\xi+1)}=\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} \Leftrightarrow h(\xi+1)=h(\xi)$$. Άρα

υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\xi,\xi+1)$ τέτοιο ώστε $h'(x_0)=0$.

γ) Ορίζουμε συνάρτηση $K(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$ η οποία έχει πεδίο ορισμού

$D_k=\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Η $K(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο D_k ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, όποτε έχουμε

$$K'(x)=\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)'=\frac{(\eta\mu x)'\cdot x-\eta\mu x\cdot(x)'}{x^2}=\frac{x\cdot\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}$$. Ορίζουμε

$H(x)=x\cdot\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$ και την μελετάμε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα,

συνεπώς: $H'(x)=(x\cdot\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x-x\cdot\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=-x\cdot\eta\mu x$.

$H'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$H'(x)$	‖	-	‖	-	‖
$H(x)$	‖	↓	0	↓	‖
$H(x)$	‖	+	‖	-	‖
$\kappa'(x)$	‖	+	‖	-	‖
$\kappa(x)$	‖	↑	‖	↓	‖

Και $H(x) > H(0) = 0$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $\kappa \uparrow$ στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ και $\kappa \uparrow$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, οπότε

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \kappa(x) < \kappa(x) < \lim_{x \to 0^-} \kappa(x) \Rightarrow \frac{1}{\frac{\pi}{2}} < \kappa(x) < 1 \Leftrightarrow \frac{2}{\pi} < \kappa(x) < 1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \kappa(x) > \kappa(x) > \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \kappa(x) \overset{(\kappa\downarrow)}{\Rightarrow} \frac{1}{\frac{\pi}{2}} < \kappa(x) < 1 \Leftrightarrow \frac{2}{\pi} < \kappa(x) < 1. \text{ Άρα } \frac{2}{\pi} < \frac{\eta\mu x}{x} < 0.$$

δ) Ορίζουμε συνάρτηση $G(x) = e^x - ex$. G συνεχής και παραγωγίσιμη στο $D_G = R$ ως διαφορά συνέχων και παραγωγίσιμων συναρτήσεων οπότε $G'(x) = e^x - e$ και

$G'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - e = 0 \Leftrightarrow e^x = e \Leftrightarrow x = 1$ και

$G'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - e > 0 \Leftrightarrow e^x > e \Leftrightarrow x > 1$ συνεπώς :

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$G'(x)$	- 0 +
$G(x)$	↓ min ↑

Άρα για κάθε $x \in R$ ισχύει $G(x) \geq G(1) \Leftrightarrow G(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq ex$.

Άρα

$$\int_1^3 |e^x - ex|\,dx = \int_1^3 (e^x - ex)\,dx = \left[e^x - e\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \left(e^3 - e\frac{9}{2}\right) - \left(e - \frac{1}{2}\right) = e^3 - \frac{9e}{2} - \frac{2e}{2} + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{2e^3 - 9e - 2e - 1}{2} = \frac{2e^3 - 11e - 1}{2} > 0 \quad \tau\mu.$$

■

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^4 + 2x - 1$, $x \in R$.

α) Να βρείτε ένα φυσικό αριθμό κ ώστε η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(\kappa, \kappa+1)$.

β) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τους άξονες $x'x$, $y'y$ και $x = x_0$, x_0 η ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $(0,1)$ να δείξετε ότι $0 < E < 3$.

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^{x^4} \cdot e^{2x} - e + x^4 = 1 - 2x$.

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{f(x)+1}$.

<u>ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ</u>

α) Παρατηρούμε ότι $f(0)=0+0-1=-1<0$ και $f(1)=1+2-1=2>0$, άρα αφού f συνεχής στο $[0,1]$ και $f(0)\cdot f(1)<0$ από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$ δηλαδή η f έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$. Άρα ο φυσικός αριθμός είναι ο $\kappa=0$.

β) Έχουμε f παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική με $f'(x)=4x^3+2>0$ άρα $f\uparrow$ στο R. Έχουμε $\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^{x_0}|f(x)|dx$, όμως $0\le x\le x_0$ και $f\uparrow$ άρα $f(0)\le f(x)\le f(x_0)$, άρα $f(x)\le 0$, οπότε έχουμε :

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^{x_0}|f(x)|dx=-\int_0^{x_0}f(x)dx=-\int_0^{x_0}\left(x^4+2x-1\right)dx=$$

$$=-\left[\frac{x^5}{5}+x^2-x\right]_0^{x_0}=-\left(\frac{x_0^{\ 5}}{5}+x_0^{\ 2}-x_0-0\right)=-\frac{x_0}{5}\left(x_0^4+5x_0-5\right)$$

Όμως επειδή $f(x_0)=0\Leftrightarrow x_0^4+2x_0-1=0\Leftrightarrow x_0^4=-2x_0+1$. έχουμε

$\mathrm{E}(\Omega)=-\dfrac{x_0}{55}(-2x_0+5x_0+1-16)=-\dfrac{x_0}{5}(3x_0-15)$. Αλλά

$0<x_0<1\Leftrightarrow 0<3x_0<3\Leftrightarrow -15<3x_0-15<-12\Leftrightarrow 12<-(3x_0-15)<15$. και

$0<\dfrac{x_0}{5}<\dfrac{1}{5}$, άρα $0<-\dfrac{x_0}{5}(3x_0-15)<3\Leftrightarrow 0<\mathrm{E}(\Omega)<3$.

γ) Έχουμε $e^{x^4}\cdot e^{2x}-e+x^4=1-2x\Leftrightarrow e^{x^4+2x}+x^4+2x=e+1$. Ορίζουμε συνάρτηση $g(x)=e^x+x$ και παρατηρούμε ότι θέλουμε να βρούμε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $g\left(x^4+2x\right)=g(1)$ ….(1)

Η g είναι παραγωγίσιμη στο R ως συνάρτηση που προκύπτει από πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων , συνεπώς $g'(x)=e^x+1>0$ άρα $g\uparrow$ στο R, g "1−1" συνάρτηση , οπότε από την (1) σχέση έχουμε : $x^4+2x=1\Leftrightarrow f(x)=0$. Άρα η f παραγωγίσιμη με $f'(x)=4x^3+2=0\Leftrightarrow x^3=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$.

x	$-\infty$	$-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\downarrow$	min	$\uparrow$

ΟΕ: $f\left(-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)=-\dfrac{3}{2\sqrt[3]{2}}-1<0$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{A}=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty \\ \mathrm{B}=f\left(-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)=-\dfrac{3}{2\sqrt[3]{2}}-1 \end{array}\right\}\Rightarrow f\left(\left(-\infty,-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right]\right)=\left[-\frac{3}{2\sqrt[3]{2}}-1,+\infty\right) \text{ και}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \\ \mathrm{B}=f\left(-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)=-\dfrac{3}{2\sqrt[3]{2}}-1 \end{array}\right\} \Rightarrow f\left(\left[-\frac{\sqrt[3]{4}}{2},+\infty\right)\right)=\left[-\frac{3}{2\sqrt[3]{2}}-1,+\infty\right)$$

Επειδή το $x=0$ ανήκει και στο δυο διαστήματα τιμών και από μονοτονία σ' αυτά η εξίσωσης $f(x)=0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες .

δ) Έχουμε : $x^{f(x)+1}=x^{x^4+2x-1+1}=e^{\ln\left(x^4+2x\right)}$, οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{f(x)+1}=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\ln\left(x^4+2x\right)}$

Θέτουμε $u=\ln\left(x^4+2x\right)$ και $u_1=x^4+2x$ οπότε :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} u_1=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^4+2x\right)=+\infty$, άρα καθώς $x\to-\infty$ έχουμε $u_1\to+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} u=\lim\limits_{u_1\to+\infty}\ln\left(u_1\right)=+\infty$, άρα καθώς $u_1\to+\infty$ έχουμε $u\to+\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{(f(x)+1)}=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\ln\left(x^4+2x\right)}=\lim\limits_{u\to+\infty} e^{u}=+\infty$.■

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΣΤΙΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ : ΑΝΤΩΝΗΣ ΜΑΛΛΙΑΡΑΚΗΣ