ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό σελίδα 76
Α2. Σχολικό σελίδα 104
Α3. α) Ψ β) σελίδα 136
Α4. Λ , Σ , Σ, Σ , Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$
$x \in R$ και $e^x > 1$
$x \in R$ και $x > 0$
$D_{fog} = (0, +\infty)$ και $f\big(g(x)\big) = \frac{e^x+2}{e^x-1}$, $x > 0$

Β2. $(fog)'(x) = \frac{-3e^x}{(e^x-1)^2} < 0$, άρα γνησίως φθίνουσα και 1-1 και αντιστρέψιμη.
$D_{f\frac{y+2}{y-1}og^{-1}} = \left(\lim\limits_{x\to+\infty}(fog)(x), \lim\limits_{x\to0^+}(fog)(x)\right) = (1, +\infty)$, διότι

$\lim\limits_{x\to+\infty}(fog)(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+2}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x(1+\frac{2}{e^x})}{e^x(1-\frac{1}{e^x})} = 1$
$\lim\limits_{x\to0^+}(fog)(x)) = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x+2}{e^x-1} = +\infty$, διότι για $x > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$
Για να βρούμε την αντίστροφη, θέτουμε $y = (fog)(x) \Leftrightarrow \frac{e^x+2}{e^x-1} = y \Leftrightarrow$..
$\Leftrightarrow (y-1)e^x = y + 2 \Leftrightarrow$ Με $y \neq 1(1)$, $e^x = \frac{y+2}{y-1} \Leftrightarrow x = \ln\frac{y+2}{y-1}$, με $\frac{y+2}{y-1} > 0$,
δηλαδή $y \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)(2)$
Όμως , ισχύει x>0 και y>1 (3)
Άρα από (1), (2), (3) βγαίνει y>1, οπότε $(fog)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$, $x > 1$

Β3. Εχουμε $\Phi'(x) = \left(\ln\frac{x+2}{x-1}\right)' = \frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{-3}{(x-1)^2} < 0$ αρα $\Phi \downarrow$ στο

$\Phi \downarrow (1, +\infty)$

Β4. $\lim\limits_{x\to1^+}\Phi(x) = \lim\limits_{x\to1^+}\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \overset{\left(\substack{\text{Θέτω } u=\frac{x+2}{x-1} \\ \lim\limits_{x\to1^+} u=+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{u\to+\infty}\ln u = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{x+2}{x-1} = 0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. f συνεχής άρα $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow$

$$\lambda = 1 - \ln\lambda$$

Θέτω

$g(\lambda) = \ln\lambda + \lambda - 1, \lambda > 0$

g παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ άρα και συνεχής. Ισχύει g(1)=0 και
$g'(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + 1 > 0$, οπότε g γνησίως αύξουσα , 1-1, άρα λ=1 μοναδική λύση.

Γ2. Η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται από τον τύπο: $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$
Ισχύει ότι : $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$, οπότε $f'(0) = 1$.
$f'(0) = $ εφω$\Leftrightarrow$ εφω=1 $\Leftrightarrow$ εφω $=$ εφ$\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \omega = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in Z$.

Γ3.**Κρίσιμα σημεία** : $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2}, & x < 0 \\ \text{συν}x - \text{ημ}x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

Για x<0 τότε $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ άρα $f'(x) \neq 0$
Για $0 < x < \frac{3\pi}{2}$ τότε $f'(x)=$ συνx − ημx
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow$ συνx=ημx $\Leftrightarrow$ συνx=συν$(\frac{\pi}{2} - x) \Leftrightarrow$
x=2κπ+$\frac{\pi}{2} - x$ ή x=2κπ-$\frac{\pi}{2} + x$(αδύνατη)
2x=2κπ+$\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$ x=κπ+$\frac{\pi}{4}$, $\kappa \in Z$
0<x<$\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \ldots\ldots \Leftrightarrow \frac{-1}{4} < \kappa < \frac{5}{4}$. Για κ=0 τότε $x = \frac{\pi}{4}$ και για κ=1 τότε x=$\frac{5\pi}{4}$. Τα Κρίσιμα Σημεία είναι $x = \frac{\pi}{4}$, x=$\frac{5\pi}{4}$.

Γ4. Το σημείο Μ τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο Β(x_β,0). Ισχύει ότι $\alpha(t_0) = -1$, $a'(t) = -\frac{a(t)}{3}$. Η εφαπτομένη στο σημείο Μ είναι
$y - f(a) = f'(a)(x - a) \Leftrightarrow -f(a) = f'(a)(x - a) \Leftrightarrow -\frac{1}{1-a} = \frac{1}{(1-a)^2}(x - a) \Leftrightarrow$
$-(1 - a) = x - a \Leftrightarrow x = 2a - 1$. Την χρονική στιγμή t είναι $x(t) = 2a(t) - 1$.

Παραγωγίζοντας κατά μέλη : $x'(t) = 2a'(t) \Leftrightarrow x'(t)=-2\frac{a(t)}{3} = \frac{2}{3}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχύει $f'(x) = e^x + 2x - e, x \in R$. Ισχύει f′ συνεχής στο [0,1],
$f'(0) = 1 - e < 0, f'(1) = 2 > 0$,άρα από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

$f''(x) = e^x + 2 > 0$, οπότε f′ γνησίως αύξουσα συνάρτηση και ισχύει :
Για $x < x_0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$
Για $x > x_0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$
Οπότε η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ελάχιστο, άρα
$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0}+2x_0 - e = 0 \Leftrightarrow e^{x_0}= -2x_0 + e$ (1), άρα
$f(x_0)=\ldots= x_0^2 - (e + 2)x_0 + e - 1$ (αντικαθιστώντας την (1) στην f)

Δ2. $\lim_{x\to x_0} [\frac{1}{f(x)-f(x_0)} + \text{ημ}(\frac{1}{x-x_0})] = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{x-x_0} [\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} + (x - x_0)\,\text{ημ}(\frac{1}{x-x_0})]$ (1)

Για $x > x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0+}\frac{1}{x-x_0}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=0$ και

$f'(x)>0$ κοντά στο x_0 άρα $\lim\limits_{x\to x_0+}\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=+\infty$

$-1\le ημ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\le 1 \Leftrightarrow -(x-x_0)\le ημ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)(x-x_0)\le x-x_0$

Από Κριτήριο παρεμβολής ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)\,ημ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)=0$

Οπότε η (1) γίνεται $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\left[\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}+(x-x_0)\,ημ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]=+\infty$

Για $x < x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0-}\frac{1}{x-x_0}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=0$ και

$f'(x)<0$ κοντά στο x_0 άρα $\lim\limits_{x\to x_0-}\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=-\infty$

Οπότε η (1) γίνεται $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\left[\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}+(x-x_0)\,ημ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]=+\infty$

Δ3.

Ορίζουμε συνάρτηση $g(x)=f(x)+x-x_0$.Εφαρμόζουμε Θ. Bolzano στο $[x_0,1]$ για την g.

g συνεχής στο $[x_0,1]$ ως πράξεις συνέχων.

$g(x_0)=f(x_0)<0\ \left(x_0<1,\ f\uparrow\ στο\,[x_0,1]\ αρα\ f(x_0)<f(1)=0\right)$

$g(1)=f(1)+1-x_0>0$

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho\in(x_0,1)$ τ.ω $g(\rho)=0$

Όμως g παραγωγίσιμη στο $(x_0,1)$ με $g'(x)=f'(x)+1>0$ στο $(x_0,1)$

Άρα το ρ είναι μοναδικό.

Δ4.

Έχουμε $f(\rho)+\rho=x_0$ και $f(x)\ge f(x_0)\ \ και\ \ f'(x_0)=0,\ f''(x)>0$

Άρα $f'\uparrow$ στο $(x_0,1)$

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ στο $[x_0,\rho]$ για την f οπότε έχουμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(x_0,\rho)$ τ.ω

$$f'(\xi)=\frac{f(\rho)-f(x_0)}{\rho-x_0}$$

Αλλά κ>ρ>ξ και $f'\uparrow$ οπότε

$$f'(\kappa)>f'(\lambda)=\frac{f(\rho)-f(x_0)}{\rho-x_0}\Leftrightarrow f'(\kappa)>\frac{f(\rho)-f(x_0)}{\rho-x_0}.$$

Επιμέλεια θεμάτων:
Μαλλιαράκης Αντώνης
Δασκαλάκη Δήμητρα
Σπυριδάκη Αθηνά-Μαρία