ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ
2022-2023

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αποδείξτε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.
Β. Διατυπώστε τον ορισμό για την ΄΄1-1΄΄συνάρτηση.
Γ. Δίνεται ο ισχυρισμός: «Αν δυο συναρτησεις $f, g: A \longrightarrow R$ ειναι ΄΄1-1΄΄ τότε και η συνάρτηση $f + g$ είναι ΄΄1-1΄΄».
α) Είναι αληθής ή ψευδής η πρόταση ;
β) να δικαιολογήσετε την απάντηση σας .
Δ. α) Αν f(x)·g(x) =0 για κάθε x ε A τότε f(x)=0 ή g(x)= 0 Σ Λ

β) Αν |f(x)| ≤ 2023 για κάθε x ε A τότε η μέγιστη τιμή της f είναι το 2023 και η ελάχιστη το - 2023 Σ Λ

γ) Αν η f συνεχής στο [α, β] και η f(x) =0 έχει ρίζα στο (α,β) τότε f(α)·f(β)<0. Σ Λ

δ) Αν η f είναι σ υ ν ε χ ή ς σε διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma \in \Delta$, τότε ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$

ε) Έστω f μια σ υ ν ε χ ή ς συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$.

Σ Λ

ΕΝΔΕΙΚΤΗΚΗ ΛΥΣΗ

Α. Σχολικό Βιβλίο : σελίδα 216
Β. Σχολικό Βιβλίο : σελίδα 33
Γ. α) Ψευδής

β) Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x$ και $g(x) = 1 - x$, $x \in R$. Οι συναρτήσεις f, g είναι ΄΄1-1΄΄ όμως το άθροισμα τους δεν είναι ΄΄1-1΄΄ γιατί $(f + g)(x) = x + 1 - x = 1$ η οποία δεν είναι ΄΄1-1΄΄ συνάρτηση .
Δ. α) Λ , β) Λ , γ) Λ , δ) Σ , ε) Λ

■

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ η οποία είναι παραγωγισιμη στο R για την οποία ισχύουν :
α) $f'(0) = 1$ και
β) $f(x + y) = f(x)f(y)e^{2xy}$ (1).

Να δείξετε ότι :

α) $f(0) = 1$,

β) $f'(x) = (2x+1)f(x), x \in R$.

γ) η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{e^{x^2+x}}$ είναι σταθερή στο R.

δ) $f(x) = e^{x^2+x}, x \in R$.

ε) η C_f δεν έχει ασύμπτωτες ,

στ) η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

ζ) η ευθεία $y = 3x + 5$ τέμνει την C_f σε μοναδικό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1,2)$.

η) $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in R$ και ότι $f(x) \geq x^2 + x + 1, x \in R$.

θ) $E \geq \frac{11}{6}$ όπου Ε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=0 και x=1.

<u>ΕΝΔΕΙΚΤΗΚΗ ΛΥΣΗ</u>

α) Για x=0 και $y = 0$ στην (1) έχουμε :

$$f(0) = f(0).f(0).e^0 \Leftrightarrow f(0)[1 - f(0)] = 0$$

$$\Leftrightarrow f(0) = 0 \text{ ή } f(0) = 1$$

Αν $f(0) = 0$ τότε για y=0 ισχύει ότι $f(x) = f(x) \cdot f(0) \cdot e^0$ =0 για κάθε $x \in R$.Δηλαδή $f'(x) = 0$ για καθε x$\in R$. Οπότε $f'(0) = 0$ άτοπο αφού από την υπόθεση ισχύει ότι $f'(0) = 1$.Συνεπώς $f(0) \neq 0$ αρά $f(0) = 1$.

β) Αν παραγωγίσουμε και τα δυο μέλη της (1) με y μεταβλητή και το x ως σταθερά έχουμε : $\left(f(x+y)\right)' = (f(x)f(y)e^{2xy})'$

$$f'(x+y)(x+y)' = f(x)(f(y)e^{2xy})'$$

$f'(x+y) = f(x)f'(y)e^{2xy} + f(x)f(y)2xe^{2xy}$ .....(2)

Επειδή η σχέση (2) ισχύει για κάθε $y \in R$ θα ισχύει και για y=0 , οπότε προκύπτει :

$$f'(x) = f(x)f'(0)e^0 + f(x)f(0)2xe^0 =$$

$$= f(x)\cdot 1\cdot 1 + f(x)\cdot 1\cdot 2x\cdot 1 = (2x+1)f(x),\ x \in R.$$

γ) Για κάθε $x \in R$ ισχυει : $g'(x) = \left(\frac{f(x)}{e^{x^2+x}}\right)' = \frac{f'(x)e^{x^2+x} - f(x)\left(e^{x^2+x}\right)'}{\left(e^{x^2+x}\right)^2} =$

$$\frac{f'(x)e^{x^2+x} - f(x)(x^2+x)'\cdot e^{x^2+x}}{e^{2(x^2+x)}} = \frac{e^{x^2+x}(f'(x) - (2x+1)f(x)}{e^{2(x^2+x)}} =$$

$\frac{f'(x)-(2x+1)f(x)}{e^{x^2+x}} == \frac{0}{e^{x^2+x}} = 0$

(αφού $f'(x) = (2x+1)f(x)$ από το ερώτημα β) .

δ) Επειδή η g είναι σταθερή συνάρτηση στο R , έχουμε :

$(g(x) = g(0)\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\alpha\theta\varepsilon\ x \in R) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^{x^2+x}} = \frac{f(0)}{e^0} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^{x^2+x}} = 1 \Leftrightarrow$
$f(x) = e^{x^2+x}$, $x \in R$.

ε) Επειδή η f είναι συνεχής στο R , ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $x^2 + x$ $\kappa\alpha\iota$ e^x θα αναζητήσουμε τις ασύμπτωτες στο $\pm\infty$.
Έχουμε : $\lim\limits_{\chi\to-\infty}(x^2+x) = +\infty$ και $\lim\limits_{\chi\to+\infty}(x^2+x) = +\infty$ οπότε και
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^2+x} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2+x} = +\infty$

συνεπώς παίρνουμε $\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\frac{e^{x^2+x}}{x} = \lim\limits_{\chi\to\pm\infty}\frac{e^{x^2+x}}{1} =$
$\lim\limits_{\chi\to\pm\infty}(2x+1)e^{x^2+x} = \pm\infty$.Οπότε ο συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτη στο $\pm\infty$.

Αρά τελικά η C_f δεν έχει ασύμπτωτες.

$\sigma\tau)$ $\Gamma\iota\alpha$ $\kappa\alpha\theta\varepsilon$ $x \in R$ $\iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota$ $\acute{o}\tau\iota$: $f'(x) = (2x+1)e^{x^2+x}$ $\kappa\alpha\iota$

$$f''(x) = (2x+1)'e^{x^2+x} + (2x+1)(e^{x^2+x})' =$$

$=[2+(2x+1)^2]e^{x^2+x}>0$, άρα η f είναι κυρτή στο R και δεν έχει σημεία καμπής .

ζ) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=3x+5 \Leftrightarrow$

$e^{x^2+x}-3x-5=0$ έχει μοναδική λύση στο (1,2).Θεωρούμε την συνάρτηση $H(x)=e^{x^2+x}-3x-5$. Η H είναι συνεχής στο R ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, οπότε είναι συνεχής και στο [1,2]. Έχουμε $H(1)\cdot H(2)<0$ γιατί ($H(1)\cong(2{,}8)^2$=7,84<8 και $H(2)=e^5-11>0$). Άρα από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $H(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (1,2).

η) Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x)=e^x-x-1,\ x\in R$. Είναι $\varphi'(x)=e^{x-1}$ άρα $\varphi'(x)=0 \Leftrightarrow e^x=1=e^o \Leftrightarrow x=0$.Ο πίνακας μεταβολών της φ είναι

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	|	$+$	
$\varphi(x)$		↘	|	↗	

Ο.Ε

Άρα ισχύει $\varphi(x)\geq 0, x\in R \Leftrightarrow e^x\geq x+1, x\in R$. Και για $x=x^2+x$ έχουμε $e^{x^2+x}\geq x^2+x+1 \Leftrightarrow f(x)\geq x^2+x+1, x\in R$.

Θ) $E=\int_0^1|f(x)|dx=\int_0^1\left|e^{x^2+x}\right|dx=\int_0^1 e^{x^2+x}\,dx\geq$

$$\int_0^1(x^2+x+1)dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1=\frac{11}{6}$$

■

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u>

Δίνεται η παραγωγισιμη συνάρτηση f στο διάστημα $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει : $xf(x)ln[f(x)]=1$, $x>0$.

α) Να δείξετε ότι : $f(x)>1$ για κάθε $x>0$.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

γ) Να δείξετε ότι ισχύει : $f(x)f(f(x)) > f(1)$ για κάθε $x > 0$.

δ) Να βρείτε τους θετικούς x_1, x_2 για τους οποίους ισχύει :

$$f(x_1) = e \ \ και \ f(x_2) = e^2$$

ε) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

<u>ΕΝΔΕΙΚΤΗΚΗ ΛΥΣΗ</u>

α) Ισχύει ότι $x \cdot f(x) \cdot \ln\big(f(x)\big) = 1, για\ καθε\ x \in\ R$ οπότε προκύπτει ότι $f(x) > 0\ \ για\ καθε\ x > 0$.
∗Εστω οτι υπάρχει: $\alpha > 0: f(\alpha) = 1$. Εχουμε οτι για $x = \alpha\ η\ αρχική\ σχέση\ γράφετε$:
$\alpha \cdot f(a) \cdot \ln\big(f(a)\big) = 1 \Longrightarrow a \cdot 1 \cdot ln1 = 1 \Longrightarrow a \cdot 0 = 1 \Leftrightarrow 0 = 1$ άτοπο.
∗ Έστω ότι υπάρχει α>0 : $F(a) < 1 \Longrightarrow lnf(a) < 0$.Άρα $\alpha \cdot f(a) \cdot \ln\big(f(a)\big) < 0$ άτοπο από υπόθεση.
Οπότε $f(x) > 1$ για κάθε x>0.

β) Η συνάρτηση f ειναι παραγωγίσιμη άρα και η συνάρτηση $\ln\big(f(x)\big)$ είναι παραγωγίσιμη , ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων . παραγωγίζουμε κατά μέλη την $xf(x)ln[f(x)] = 1$ οπότε εχουμε :

$$(xf(x)ln[f(x)])' = (1)' \Longrightarrow$$
$$f(x)ln[f(x)] + xf'(x)lnf(x) + xf'(x) = 0 \Longrightarrow$$
$$f'(x)(xlnf(x)) - x) = -f(x) \cdot lnf(x) \Longrightarrow$$
$$f'(x) = -\frac{f(x)\ln\big(f(x)\big)}{xlnf(x)+x} < 0 \ \text{ για κάθε } x > 0 \Longrightarrow f \downarrow \text{στο } (0, +\infty).$$

γ) Θέτουμε όπου x το $f(x)$ στην σχέση $xf(x)ln[f(x)] = 1$ οπότε έχουμε : $f(x).f\big(f(x)\big).\ln\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = 1 \Leftrightarrow f(x).f\big(f(x)\big) = \frac{1}{\ln\big(f(f(x))\big)}$ $, x > 0$
(Αφού $f(x) > 1, x > 0\ \Rightarrow f\big(f(x)\big) > 0$) .

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{1}{\ln\left(f\left(f(x)\right)\right)} > f(1) \Leftrightarrow f(1)\ln(f\left(f(x)\right) < 1$

Αλλά ισχύει ότι : Αν θέσουμε στη σχέση $xf(x)ln[f(x)] = 1$ $\chi = 1$ εχουμε $1 = f(1)lnf(1)$ δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι

$f(1)\ln(f\left(f(x)\right) < f(1)lnf(1) \Leftrightarrow \ln(f\left(f(x)\right) < lnf(1), f(1) > 0$

Ή ισοδύναμα $(f\left(f(x)\right) < f(1)$ και αφού $f \downarrow$ έχουμε $f(x) > 1$ που ισχύει .Άρα τελικά ισχύει ότι $f(x)f(f(x)) > f(1)$ για κάθε $x > 0$.

δ) Αν θέσουμε στην σχέση $xf(x)ln[f(x)] = 1$ οπου $x = x_1$ έχουμε $x_1f(x_1)ln[f(x_1)] = 1 \Longrightarrow x_1elne = 1 \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{1}{e}}$

και ομοίως για $x = x_2$ βρίσκουμε ότι : $x_2f(x_2)ln[f(x_2)] = 1 \Longrightarrow x_2e^2lne^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{1}{2e^2}}$.

ε) Η συνάρτηση f ειναι συνεχής ως παραγωγίσιμη , άρα το ολοκλήρωμα $\int_{\chi_1}^{\chi_2} f(x)dx$ είναι καλώς ορισμένο οπότε έχουμε :

$$\int_{\chi_1}^{\chi_2} f(x)dx = \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{2e^2}} f(x)dx = \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{2e^2}} \frac{1}{xlnf(x)}dx$$

Θέτουμε $u = f(x) \Longrightarrow du = f'(x)dx \Longrightarrow du = -\frac{f(x)lnf(x)}{x(1+\ln(f(x)))}dx \Longrightarrow$

$du = -\frac{ulnu}{x(1+lnu)}dx \Longrightarrow \boxed{\frac{dx}{x} = -\frac{1+lnu}{ulnu}}$

$u_1 = f\left(\frac{1}{e}\right) = e$ και $u_2 = f\left(\frac{1}{2e^2}\right) = e^2$

Οπότε έχουμε $I = \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{2e^2}} \frac{1}{xlnf(x)}dx = \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{2e^2}} \frac{1}{lnf(x)}\frac{1}{x}dx =$

$-\int_{e}^{e^2} \frac{1}{lnu}\frac{1+lnu}{ulnu}du = \int_{e^2}^{e} \frac{1+lnu}{uln^2u}du$

Θέτουμε $y = lnu \Longrightarrow dy = \frac{1}{u}\mathrm{du}$ και για $u = e \Longrightarrow y = 2$ και για $u = e^2 \Longrightarrow y = 2$

Αρα : $I = \int_{2}^{1} \frac{1+y}{y^2}dy = \left[-\frac{1}{y} + lny\right]_2^1 = -1 + 0 - \frac{1}{2} + ln2 =$

$= -\frac{1}{2} - ln2.$

■

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα [1,8], με συνεχή πρώτη παράγωγο .Επίσης για την συνάρτηση f ισχύουν :

(1) $f(1) = f(8) + ln16$

(2) $f'(1) = -\frac{1}{48}$

(3) $H\ f\ \delta\varepsilon\nu$ παρουσιάζει μέγιστο στο 1.

Να δείξετε ότι :

α) Υπάρχει κ>1 τέτοιο ώστε $f(\kappa) > f(1)$ και λ>1 τέτοιο ώστε $f'(\lambda) = -\frac{4}{7}ln2$.

β) Η γραφική παράσταση της f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη σε σημείο της με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα (1,8).

γ) Υπάρχει $x_0 \in (1,8)$ τέτοιο ώστε $3f'(x_0) = -\frac{4}{x_0}$.

δ) Υπάρχει $\xi \in (1,8)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -\frac{1}{2}ln2$.

ε) Υπάρχει $\xi_1 \in (1,8)$ τέτοιο ώστε $48f(\xi_1 = -\xi_1$

<u>ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ</u>

α) Επειδή η συνάρτηση είναι συνεχής στο [1,8] θα έχει μέγιστο σε κάποιο $x \in (1,8]$ αφού δεν παρουσιάζει μέγιστο στο 1 .Αρα υπάρχει κ>1 ώστε $f(\kappa) \geq f(x)$ για κάθε $x \in [1,8]$ και επειδη $\kappa \neq 1$ ισχύει ότι $f(\kappa) > f(1)$.Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ για την f στο [1,8]

f συνεχής στο [1,8]

f παραγωγίσιμη στο (1,8) από υπόθεση άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα λ∈ (1,8) τέτοιο ώστε $f'(\lambda) = \frac{f(8)-f(1)}{8-1} = \frac{-ln16}{7} = -\frac{4}{7}ln2$.

β) Η συνάρτηση είναι συνεχής στο [1,8], άρα θα παρουσιάζει ακρότατα (μεγιστο,ελαχιστο) . Το μέγιστο παρουσιάζεται στην θέση κ με κ≠ 1 και επειδή $f(1) = f(8) + ln16$ ισχύει ότι : $f(1) > f(8)$.

Αρα $f(\kappa) > f(1) > f(8)$ δηλαδή κ≠ 8 οπότε το κ είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος [1,8] συνεπώς από θεώρημα Fermat θα έχουμε $f'(\kappa) = 0$.

γ)Εφαρμόζουμε Θεώρημα Rolle για την $g(x) = 3f(x) + 4lnx$ στο [1,8]

g συνεχής στο [1,8] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

g παραγωγίσιμη στο (1,8) ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$g(1) = 3f(1) + 0 = 3f1)$

$g(8) = 3f(8) + 4ln8 = 3(f(1) - ln16) + 4ln8$

$= 3f(1) - 3ln16 + 4ln8 = 3f(1)$

Αρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,8)$ τέτοιο ώστε :

$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow 3f'(x_0) + \frac{4}{x_0} = 0 \Leftrightarrow 3f'(x_0) = -\frac{4}{x_0}$.

δ) Ορίζουμε συνάρτηση $h(x) = f'(x) + \frac{1}{2}ln2$ στο [1,λ] και εφαρμόζουμε Θεώρημα Bolzano. Έχουμε :

*h συνεχής στο [1,λ]

* $h(1) = f'(1) + \frac{1}{2}ln2 > 0$ γιατί:

$f'(1) > -\frac{1}{48} \Leftrightarrow f'(1) + \frac{1}{2}ln2 > \frac{1}{2}ln2 - \frac{1}{48} = \frac{1}{2}\left(ln2 - \frac{1}{24}\right) =$
$\frac{1}{2}\frac{24ln2 - lne}{24} = \frac{1}{2}\frac{ln2^{24} - lne}{24} > 0$.

*$h(\lambda) = f'(\lambda)\frac{1}{2}ln2 = -\frac{4}{7}ln2 + \frac{1}{2}ln2 = -\frac{8}{14}ln2 + \frac{7}{14}ln2 =$
$= -\frac{1}{14}ln2 < 0$.

Αρα $h(1) \cdot h(\lambda) < 0$ οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, \lambda) \sqsubseteq (1,8)$ τέτοιο ώστε :

$h(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) + \frac{1}{2}ln2 = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = -\frac{1}{2}ln2$.

ε) Ορίζουμε συνάρτηση $K(x) = 48f'(x) + x$ στο [1,ξ] και εφαρμόζουμε θεώρημα Bolzano.

*Κ συνεχής στο [1,ξ]

*$K(1) = 48f'(1) + 1 > 0$, αφού $f'(1) > -\frac{1}{48} \Leftrightarrow 48f'(1) + 1 > 0$

*$K(\xi) = 48f'(\xi) + \xi = 48\left(-\frac{1}{2}ln2\right) + \xi = -24ln2 + \xi < 0$

Γιατί : ξ<8$\Longrightarrow -24ln2 + \xi < -24ln\xi + 8 \Leftrightarrow -24ln2 + \xi$
$< -8(3ln2 - 1) \Leftrightarrow -24ln2 + \xi < -8(ln8 - lne) < 0$.

Αρα $K(1) \cdot K(\xi)$<0 οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (1, \xi)$ τέτοιο ώστε : $K(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow 48f'(\xi_1) + \xi_1 = 0 \Leftrightarrow 48f'(\xi_1) = -\xi_1$.

■

ΕΠΙΛΟΓΗ ΘΕΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΜΕΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ :
ΑΝΤΩΝΗΣ ΜΑΛΛΙΑΡΑΚΗΣ

Σκέψεις ενός μαθητή
≪ Κάθε φορά που έβλεπα τους πρώτους αριθμούς σκεφτόμουν τον καθηγητή. Ήταν κρυμμένοι μέσα σε κάθε σκηνικό της καθημερινής ζωής .Σε μια μικρή απόδειξη του σούπερ μάρκετ, στον αριθμό μιας πόρτας, στα ωράρια των λεωφορείων ,σε μια ημερομηνία λήξης ενός κομματιού ζαμπόν ,στους βαθμούς των ελέγχων των μαθητών. Καθένας τους ενώ υπηρετούσε πιστά τον επίσημο ρόλο του, προστάτευε και στήριζε με ζήλο την πρωταρχική του σημασία ,η οποία κρυβόταν κάτω από την επιφάνεια. Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι καταλάβαινα αμέσως αν ένας αριθμός είναι πρώτος. Χάρη στην εκπαίδευση που είχα λάβει από τον καθηγητή μπορούσα να διαισθανθώ από την ιδιαίτερή τους μυρουδιά, χωρίς να χρειάζεται να υπολογίσω εάν πρόκειται για πρώτους αριθμούς μέχρι περίπου το 100 ,από εκεί και πάνω όμως, όταν κάποιος αριθμός μου φαινόταν ότι ενέπιπτε στην κατηγορία των υποψηφίων έπρεπε να αρχίσω να διαιρώ .≫
Τι υπέροχοι αριθμοί!!!

Η ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΚΑΙ ΟΙ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ ΤΟΥ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΥ

« Κ Υ Κ Λ Ο Σ »

ΕΥΧΟΝΤΑΙ ΣΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ ΚΑΛΗ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ ΚΑΙ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΣΤΙΣ ΕΠΕΡΧΟΜΕΝΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ.

ΚΥΚΛΟΣ