ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα 1

Α. Να δώσετε τον ορισμό της γνησίως αύξουσας συνάρτησης.
Β. Αν $a > 0 \mu\varepsilon\alpha \neq 1$να δείξετε ότι ισχύουν :

I. $log_{\alpha}(\theta_1 \cdot \theta_2) = log_{\alpha}\theta_1 + log_{\alpha}\theta_2$

II. $log_{\alpha}\theta^{\kappa} = \kappa \cdot log_{\alpha}\theta$

Όπου θ, θ_1 ,θ_2 $0, \kappa \in R$.

Γ. Να χαρακτηρίσετε με σωστό ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

I.Η συνάρτηση $f(x)=x^2$, με πεδίο ορισμού το διάστημα [2,3] είναι άρτια.

II.Η συνάρτηση f(x)=-6+4συν5x έχει μέγιστη τιμή -2 και ελάχιστη -10.

III.Η συνάρτηση f(x)=φ(x+c) , όπου c>0 , προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ, κατά c μονάδες προς τα δεξιά.

IV.Η συνάρτηση f(x)=a^x,με 0<α≠ 1 ,είναι γνησίως αύξουσα στο R.

V. Για κάθε x>0 ισχύει : $\ln x + \ln\frac{1}{x} = 0$.

Δ. Να υπολογιστούν οι τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

I. Α =$log_{\sqrt[3]{2}}2^{-1}$

II. Β=$\frac{3}{2}log_{\alpha}\sqrt[3]{\alpha} + \frac{1}{2}log_{\alpha}\sqrt[3]{\alpha} + log_{\alpha}\sqrt[3]{\alpha}$, με $0 < \alpha \neq 1$

Θέμα 2

Αν η εξίσωση $x^5 + x^4 - 2x - 2 = 0$ (1) έχει ακέραια ρίζα τον αριθμό *3κ-4*.

Α. Να βρείτε το *κ* .
Β. Να λυθεί η εξίσωση *(1)* .
Γ. Να λυθεί η ανίσωση $x^5 + x^4 - 2x - 2 \geq 0$.
Δ. Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu^5 x + \eta\mu^4 x - 2\eta\mu x - 2 = 0$

<u>Θέμα 3</u>

Α. Να βρεθεί πολυώνυμο P(x) δευτέρου βαθμού τέτοιο ώστε να ισχύει :

$$P\big(P(x)\big) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 6$$

Β. Δίνεται πολυώνυμο $P(x) = x^4 - \alpha x^3 + x^2 - \beta x + 2$,με α,β$\in R$,αν είναι γνωστό ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα $(x+1)^2$.

I. Να βρείτε τα *α, β* .

II. Να δείξετε ότι $P(x) \geq 0$,για κάθε $x \in R$.

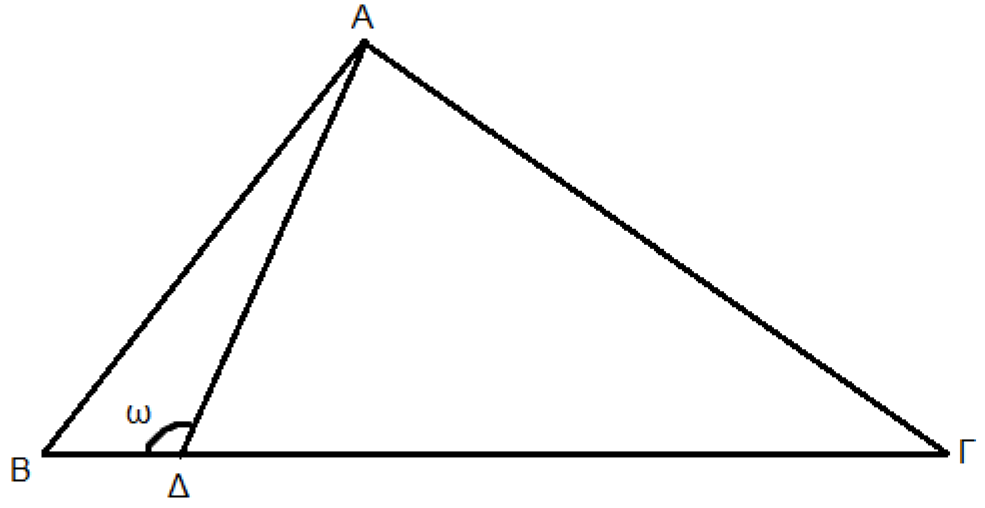
<u>Θέμα 4</u>

Α. Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ στο διάστημα [0,4π] .

Β. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση
f$(x) = \eta\mu x \kappa\alpha\iota g(x) = \frac{1}{2}$.

Γ. Να βρείτε η συντεταγμένη των σημείων τομής f$(x) = g(x)$ *Κ, Λ* , *Μ* , *Ν* ,στο διάστημα [0,4π] ,με $x_K < x_\Lambda x_M < x_N$ και στην συνέχεια να βρείτε τα μήκη ΚΛ και ΜΝ και να τα συγκρίνετε.

Δ. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται ένα τριγωνικό οικόπεδο. Αν γνωρίζετε ότι $\hat{\omega} = 120°$, $A\Delta = 50m, B\Gamma = 100m$ να βρείτε το εμβαδόν του οικοπέδου.



<u>Απαντήσεις :</u>

Θέμα 1

Α. Σχολικό Βιβλίο Άλγεβρα Β' Λυκείου σελ.31
Β. Αποδείξεις σχολικού βιβλίου Άλγεβρα Β' Λυκείου σελ.175
Γ. Ι.-Λ ,ΙΙ.-Σ ,ΙΙΙ.-Λ ,ΙV.-Λ ,V.-Σ
Δ. Ι. Από τον ορισμό λογαρίθμου προκύπτει ότι :

$log_{\alpha}\theta = x\alpha^{x} = \theta$

Έστω ότι $log_{\sqrt[3]{2}}2^{-1} = x$ $\sqrt[3]{2}^{x} = 2^{-1}\left(2\left|\ \right|\frac{1}{3}\right)^{x} = 2^{-1}2^{\frac{x}{3}} = 2^{-1}1\underset{\Leftrightarrow}{-}1\frac{x}{3} = -1x = -3$

Άρα $A = log_{\sqrt[3]{2}}2^{-1} = -3.$

Ι. Β= $\frac{3}{2}log_{\alpha}\sqrt[3]{\alpha} + \frac{1}{2}log_{\alpha}\sqrt[3]{\alpha} + log_{\alpha}\sqrt[3]{\alpha}$ = 3 $log_{\alpha}\sqrt[3]{\alpha}$ = 3 $log_{\alpha}a^{\frac{1}{3}}$ $=log_{\alpha}\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{3}$ $=log_{\alpha}a^{\frac{3}{3}}$ $=log_{\alpha}a = 1$

Άρα *B* = *1*

Θέμα 2

Αν η εξίσωση $x^5 + x^4 - 2x - 2 = 0$ (1) έχει ακέραια ρίζα τον αριθμό *3κ-4*.

Α. Να βρείτε το *κ* .

Πιθανές ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου είναι οι διαιρέτες του 2 : ±1 , ± 2 με:
P(1)=1+1-2-2=-2≠0
P(2)=32+16-4-2=42≠0
P(-2)=-32+16+4-2=-14≠0
$P(-1) = (-1)^5 + (-1)^4 - 2\cdot(-1) - 2 = -1 + 1 + 2 - 2 = 0$

Άρα το *-1* είναι η μοναδική ακέραια ρίζα του $P(x)$. Όμως η παράσταση *3κ-4* είναι ακέραια ρίζα του πολυωνύμου οπότε : *3κ-4* = -1 ⇔ *κ* = *1* .

Β. Να λυθεί η εξίσωση *(1)* .

$x^5 + x^4 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^4(x+1) - 2(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x^4 - 2)\cdot(x+1)$=0 ⇔
$x^4 = 2ήx + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{2}ήx = -1$

Γ. Να λυθεί η ανίσωση $x^5+x^4-2x-2\geq 0.$

$$(x^4-2)\cdot(x+1)\geq 0$$

Θέτω $(x^4-2)\cdot(x+1)=0$

x	$-\infty$		$-\sqrt[4]{2}$		-1		$+\sqrt[4]{2}$		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	0	$+$	
x^4-2		$+$	0	$-$		$-$		$+$	
$\mathrm{P}(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x\in\left[-\sqrt[4]{2},-1\right]\cup$

Δ. Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu^5 x+\eta\mu^4 x-2\eta\mu x-2=0$

$\eta\mu^5 x+\eta\mu^4 x-2\eta\mu x-2=0$

Θέτω ημx=y και προκύπτει:

$y^5+y^4-2y-2=0$

Από β) ερώτημα οι λύσεις της εξίσωσης είναι:

$y=\sqrt[4]{2}ή y=-\sqrt[4]{2}ή y=-1$

$\Leftrightarrow\ \eta\mu x=\sqrt[4]{2}>1, Απορ.$ $\Leftrightarrow\ \eta\mu x=-\sqrt[4]{2}\leftarrow 1 Απορ.$ $\Leftrightarrow\ \eta\mu x=-1$ $\Leftrightarrow \eta\mu x=$

$\eta\mu\left(\frac{-\pi}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow\ x=\begin{cases}2k\pi-\frac{\pi}{2}\\ 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\end{cases},\ k\in Z$$

<u>Θέμα 3</u>

Α.

Έστω P(x) πολυώνυμο 2ου βαθμού της μορφής $P(x)=ax^2+\beta x+\gamma$

Οπότε : $P\big(P(x)\big)=\alpha(ax^2+\beta x+\gamma)^2+\beta(ax^2+\beta x+\gamma)+\gamma=$

$\alpha(ax|\ \ |2+\beta x+\gamma)(ax^2+\beta x+\gamma)+\beta(ax^2+\beta x+\gamma)+\gamma=$

$\alpha(\alpha^2x^4+\alpha\beta x^3+\alpha\gamma x^2+\alpha\beta x^3+\beta^2x^2+\beta\gamma x+\alpha\gamma x^2+\beta\gamma x+\gamma^2)\ +\ \alpha\beta x^2+\beta^2 x+\beta\gamma+\gamma=$

$\alpha^3x^4+\alpha^2\beta x^3+\alpha^2\gamma x^2+\alpha^2\beta x^3+\alpha\beta^2x^2+\alpha\beta\gamma x+\alpha^2\gamma x^2+\alpha\beta\gamma x+\alpha\gamma^2+\alpha\beta x^2+\beta^2x+\beta\gamma+\gamma=$

$\alpha^3x^4+2\alpha^2\beta x^3+(2\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\alpha\beta)x^2+(2\alpha\beta\gamma+\beta^2)x+\alpha\gamma^2+\beta\gamma+\gamma$

Όμως:

$$P\big(P(x)\big) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 6$$

Άρα :

- $\alpha^3 = 1 \;\Leftrightarrow\; \alpha = 1$
- $2\alpha^2\beta = -4 \;\Leftrightarrow 2\cdot 1^2\beta = -4 \;\Leftrightarrow\; \beta = -2$
- $2\alpha\beta\gamma + \beta^2 = 12 \;\; 1\cdot(-2)\gamma + (-2)^2 = 12 \;\Leftrightarrow \gamma = -2$

Άρα $\quad P(x) = x^2 - 2x - 2$

Β.

Ι.

Διαιρούμε αρχικά το $P(x)$ με το $(x+1)$

Κάνουμε σχήμα Horner.

1	- α	1	-β	2	ρ=-1
↓	-1	α+1	-α-2	α+β+2	
1	- α-1	α+2	-β-α-2	α+β+4	

Αφού το $(x+1)$είναι παράγοντας του $P(x)$, τότε το υπόλοιπο ισούται με 0,

Άρα *α+β+4=0 α+β=-4* (1)

Επίσης προκύπτει το πηλίκο $\pi(x) = x^3 + (-\alpha-1)x^2 + (\alpha+2)x + (-\beta-\alpha-2)$

Διαιρούμε το πηλίκο με το $(x+1)$, εκτελώντας σχήμα Horner.

1	- α -1	α+2	-β-α-2	ρ=-1
↓	-1	α+2	-2α -4	
1	- α-2	2α+4	-β - 3α -6	

Αντίστοιχα το νέο υπόλοιπο ισούται με 0,

Άρα -β - 3α - 6=*0* -β - 3α =*6* (2)

Προσθέτω τα (1) , (2) κατά μέλη:

α+β = -4

(+)   - 3 α -β =   6

-2α   =   2

α   = -1

Από την *α+β =-4* , *για α =-1* βρίσκουμε ότι *β=-3* . *Άρα α=-1 και β=-3.*

II. Να δείξετε ότι για $P(x) \geq 0$ κάθε $x \in R$

Από το ερώτημα *I.* $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 2 = x^3(x+1) + x^2 + 3x + 2 =$

$= x^3(x+1) + (x+2)(x+1) = (x+1)(x^3 + x + 2)$ *(3)*

Έστω $Q(x) = x^3 + x + 2$. Παραγοντοποιώ το $Q(x)$ και με την βοήθεια του σχήματος Horner παρατηρώ ότι $Q(-1) = 0$.

1	0	1	2	ρ=-1
↓	-1	1	-2	
1	-1	2	0	

Άρα $x^3 + x + 2 = (x^2 - x + 2)(x+1)$ *(4)*

Από*(3)* και*(4)* προκύπτει ότι

$P(x) = (x+1)(x^2 - x + 2)(x+1) = (x+1)^2\,(x^2 - x + 2)$

- $(x+1)^2 \geq 0, \text{για κάθε } x \in R$
- $x^2 - x + 2 \; 0, \text{διότι έχει } \Delta < 0$

Άρα $P(x) \geq 0$.

<u>Θέμα 4</u>

Α. Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ στο διάστημα [*0,4π*] .

$$\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ 2k\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases},\ k \in Z$$

Αφού $x \in$ [*0,4π*] λύνουμε τις παρακάτω ανισώσεις :

- $0 \leq 2k\pi + \frac{\pi}{6} \leq 4\pi \Leftrightarrow \frac{-\pi}{6} \leq 2k\pi \leq 4\pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{-\pi}{6} \leq 2k\pi \leq \frac{23\pi}{6}$
  $\Leftrightarrow \frac{-1}{12} \leq k \leq \frac{23}{12}$

Αφού $k \in Z \quad k = 0$ή$k = 1$

Για $k = 0$: ή Για $k = 1$:

$x = 2 \cdot 0 \cdot \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

$x = 2 \cdot 1 \cdot \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$

Άρα $x = \frac{\pi}{6}$ ή $x = \frac{13\pi}{6}$

Αντίστοιχα :

- $0 \le 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \le 4\pi \Leftrightarrow \frac{-5\pi}{6} \le 2k\pi \le 4\pi - \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{-5\pi}{6} \le 2k\pi \le \frac{19\pi}{6}$
  $\Leftrightarrow \frac{-5\pi}{2\pi \cdot 6} \le k \le \frac{19\pi}{2\pi \cdot 6} \Leftrightarrow \frac{-5}{12} \le k \le \frac{19}{12}$

Αφού $k \in Z \quad k = 0$ή$k = 1$

Για $k = 0$: ή Για $k = 1$:

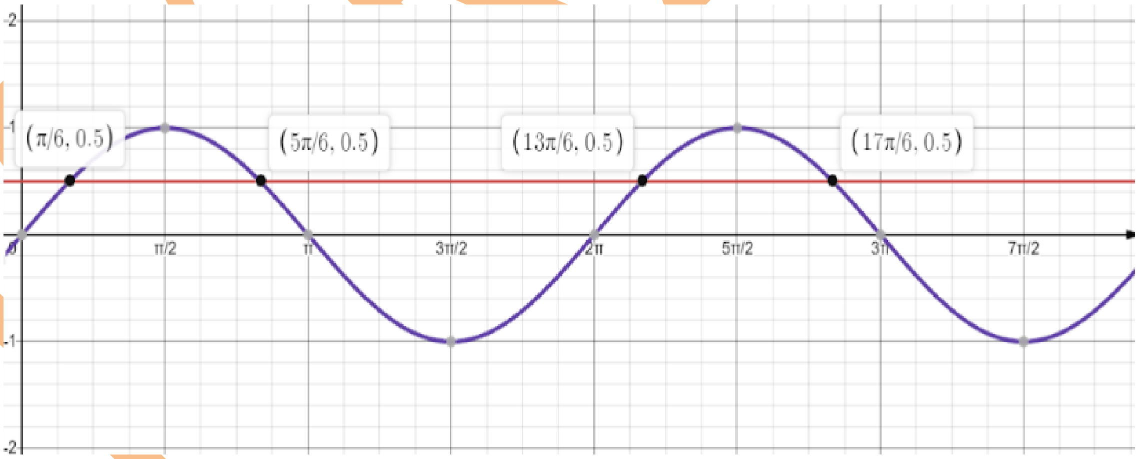
$x = 2 \cdot 0 \cdot \pi + \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

$x = 2 \cdot 1 \cdot \pi + \frac{5\pi}{6} = \frac{17\pi}{6}$

Άρα $x = \frac{5\pi}{6}$ ή $x = \frac{17\pi}{6}$

Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι :$x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{13\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$, $x = \frac{17\pi}{6}$,στο [*0,4π*]

Β.



Γ.

Τα σημεία τομής των συναρτήσεων f$(x) = ημx και g(x) = \frac{1}{2}$είναι τα :

K$(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$, *Λ*$(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2})$, *M*$(\frac{13\pi}{6}, \frac{1}{2})$, *N*$(\frac{17\pi}{6}, \frac{1}{2})$

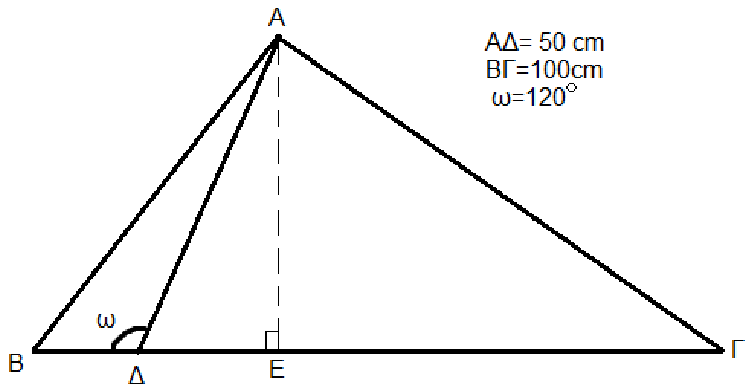
(K Λ) = $\sqrt{(x_Λ - x_K)^2 +} = \frac{4\pi}{6}$

(M N) = $\sqrt{(x_N - x_M)^2 +} = \frac{4\pi}{6}$

Άρα (Κ Λ) = (Μ Ν)

Δ. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται ένα τριγωνικό οικόπεδο. Αν γνωρίζετε ότι $\omega = 120°, A\Delta = 50m, B\Gamma = 100m$ να βρείτε το εμβαδόν του οικοπέδου.

Φέρω το ύψος από την κορυφή Α, το οποίο τέμνει την ΒΓ στο Ε με ΒΓ ⊥ Ε . Το τρίγωνο ΑΕΔ που προκύπτει είναι ορθογώνιο.



Οι γωνίες $\omega \kappa\alpha\iota A\hat{\Delta}E$ είναι παραπληρωματικές άρα : $\omega + A\hat{\Delta}E = 180° \Leftrightarrow$

$A\hat{\Delta}E = 60°$

Επιπλέον για το τρίγωνο $A\Delta E$ ισχύει ότι : $A\hat{\Delta}E + A\hat{E}\Delta \Delta\hat{A}E = 180°$

$$60° + 90° + \Delta\hat{A}E = 180°$$
$$\Delta\hat{A}E = 30°$$

Για το ορθογώνιο τρίγωνο ΔAE επίσης ισχύει ότι : $\sigma\upsilon\nu(\Delta\hat{A}E) = \frac{AE}{A\Delta}$

$$\sigma\upsilon\nu 30° = \frac{AE}{50}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AE}{50}$$
$$AE = \frac{50\sqrt{3}}{2}$$
$$Άρα AE = 25\sqrt{3}$$

Οπότε $E(AB\Gamma) = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2} = \frac{AE \cdot B\Gamma}{2} = \frac{25\sqrt{3} \cdot 100}{2} = 1250\sqrt{3}$.

''Τα καθαρά μαθηματικά είναι , κατά κάποιο τρόπο , η ποίηση των λογικών ιδεών.''

Αλβέρτος Αϊνστάιν

Επιμέλεια
Μαλλιαράκης Αντώνης
Τσιχλάκης Σπύρος