ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αποδείξτε ότι « Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ'ένα διάστημα (α,β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής .

i) Αν $f'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

ii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β)»

Β. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

α) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)>0$ τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

β) Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη σ΄αυτό .

γ) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

δ) Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και f γνησίως αύξουσα στο Δ τότε ισχύει ότι $f'(x)>0$.

.

ε) Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)<f(\beta)$, τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)>0$

.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

Α .Σχολικό Βιβλίο σελίδα 144
Β. Σχολικό Βιβλίο σελίδα 133
Γ. α) Σ, β) Λ, γ) Σ , δ) Λ , ε) Σ.

■

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\ln\dfrac{e^x+2}{3}$ και οι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί α,β,γ ώστε α+β+γ=1.

Α. α) Να μελετήσετε την f, ως προς την μονοτονία και τα κοίλα .
β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντιστροφή της .
γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συναρτησης f .

Β. α) Να αποδειχθεί ότι $27\alpha\beta\gamma\le 1$,
β) αν αβγ$\neq 0$ να αποδειχθεί ότι υπάρχει χ>0 ώστε $\alpha^x+\beta^x+\gamma^x<1$.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ :

Α. α) f συνεχής και δυο φορές παραγωγίσιμη στο R.

$$f'(x)=\left(\ln\frac{e^x+2}{3}\right)'=\frac{3}{e^x+2}\left(\frac{e^x+2}{3}\right)'=\frac{3}{e^x+2}\cdot\frac{e^x}{3}=\frac{e^x}{e^x+2}.$$

$f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

$$f''(x)=\left(\frac{e^x}{e^x+2}\right)'=\frac{(e^x)'(e^x+2)-(e^x)(e^x+2)'}{(e^x+2)^2}=\frac{2e^x}{(e^x+2)^2}.$$

$f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R και κυρτή στο R.

β) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο R είναι και ′′1-1′′ , δηλαδή αντιστρέφεται. θέτω

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=\ln\frac{e^x+2}{3}$$

$$\Leftrightarrow e^y=\frac{e^x+2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3e^y-2=e^x$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(3e^y-2\right)=x$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\ln\left(3e^y-2\right)$$

$$\left(\begin{array}{l} 3e^y-2>0 \\ e^y>\frac{2}{3} \\ y>\ln\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

Για $y=x$ έχω $f^{-1}(x)=\ln\left(3e^x-2\right)$ με $D_{f^{-1}}=\left(\ln\frac{2}{3},+\infty\right)$

γ) Έχουμε :

$$\to \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{e^x+2}{3}}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(\frac{e^x+2}{3}\right)\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{e^x+2}\cdot\frac{e^x}{3}}{1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+2}=1$$

Άρα $\boxed{\lambda=1}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{e^x+2}{3}-\ln e^x\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{\frac{e^x+2}{3}}{\frac{e^x}{1}}=\ln\frac{e^x+2}{3e^x}=\frac{1}{3}$$

Άρα $\boxed{\beta=\frac{1}{3}}$

Η πλάγια ασύμπτωτη είναι : $y=x+\frac{1}{3}$

$$\to \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\frac{e^x+2}{3}}{x}=\ln\frac{2}{3}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$ Άρα $\boxed{\lambda=0}$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\ln\frac{e^x+2}{3}\right)=\frac{2}{3}$$ Άρα $\boxed{\beta=\frac{2}{3}}$

Η οριζόντια ασύμπτωτη είναι : $y=\frac{2}{3}$

Β. α. Οι αριθμοί α,β,γ είναι μη αρνητικοί .Θέτουμε $x=\sqrt[3]{\alpha}$, $y=\sqrt[3]{\beta}$, $z=\sqrt[3]{\gamma}$.

Από ταυτότητα Euler έχουμε :

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=\frac{1}{2}(x+y+z)\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]\geq 0 \Rightarrow$$

$$x^3+y^3+z^3-3xyz\geq 0 \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma\geq 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \Rightarrow 1^3\geq 3^3\alpha\beta\gamma \Rightarrow 27\alpha\beta\gamma\leq 1.$$

β. Έστω ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $\alpha^x+\beta^y+\gamma^z\geq 1$. Έστω συνάρτηση $f:f(x)=\alpha^x+\beta^y+\gamma^z$. Τότε αφού α+β+γ=1 παρατηρούμε ότι για $x=1$, $f(x)\geq f(1)$ για κάθε $x>0$ άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο .

Επομένως από θεώρημα Fermat ισχύει : $f'(1)=0$. Οπότε:

$$f'(x)=\alpha^x\ln\alpha+\beta^x\ln\beta+\gamma^x\ln\gamma$$

$$f'(1)=0 \Leftrightarrow \alpha\ln\alpha+\beta\ln\beta+\gamma\ln\gamma=0 \quad (1)$$

Αλλά $\alpha,\beta,\gamma\in(0,1]$ και άρα $\ln\alpha,\ln\beta,\ln\gamma\in(-\infty,0]$.

Τότε λόγω της (1) ισχύει ότι

$\ln\alpha=\ln\beta=\ln\gamma=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma=1$ Οπότε $\alpha+\beta+\gamma=3$

ΑΤΟΠΟ . Άρα υπάρχει $x>0$ τέτοιο ώστε $\alpha^x+\beta^x+\gamma^x<1$.

■

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα : $(f(x))^3+3f(x)=e^x-x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση g με $g(x)=f(x)-x$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $g(x)>-x-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Αν υπάρχει $K_0(x_0,g(x_0))$ το οποίο ανήκει στην C_g και απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία (ε) : $y=-x-2$ αποδείξτε ότι η εφαπτομένη της C_g στο K_0 είναι παράλληλη στην ευθεία (ε).

γ) Αν ισχύουν οι υποθέσεις του ερωτήματος β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου K_0.

Ενδεικτική Λύση :

α) Αφού f παραγωγίσιμη τότε f^3 παραγωγίσιμη , οπότε :

$$\left((f(x))^3+3f(x)\right)'=\left(e^x-x-1\right)' \Rightarrow 3f^2(x)\cdot f'(x)+3f'(x)=e^x-1 \Rightarrow f'(x)=\frac{e^x-1}{3\left(f^2(x)+1\right)}$$

$x\in\mathbb{R}$.

Άρα $f'(x)>0 \Leftrightarrow e^x-1>0 \Leftrightarrow x>0$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f'(x)$	- 0 +
$f(x)$	↘ ↗

min

Άρα $f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Για $x=0$ στην αρχική έχω $f^3(0)+3f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)\left(f^2(0)+3\right)=0 \Rightarrow f(0)=0$ Άρα $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Οπότε : $g(x)>-x-2 \Leftrightarrow f(x)-x>-x-2 \Leftrightarrow f(x)>-2$ που ισχύει Αφού $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Ισχύει :

$$d(K_0,\varepsilon)=\frac{|1x_0+1g(x_0)+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}\overset{(a)}{=}\frac{x_0+g(x_0)+2}{\sqrt{2}}=\frac{f(x_0)+2}{\sqrt{2}}\geq\frac{0+2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

Δηλαδή το η $d(K_0,\varepsilon)$ ελαχιστοποιείται όταν $f(x_0)=0$ Δηλαδή για χ=0.

Άρα $f'(x_0)=f'(0)=\dfrac{e^0-1}{3(0^2+1)}=0$

Οπότε $g'(x_0)=f'(x_0)-1=-1$ Άρα η εφαπτομένη της της C_g στο σημείο K_0 είναι παράλληλη προς την (ε).

γ) Για $x_0=0$ ισχύει $K_0(0,g(0))=K_0(0,0)$ Άρα το σημείο K_0 είναι η αρχή των αξόνων.

■

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις :

ι) $g(x)g(y)-2g(xy)=g(x+y)-2\,(1)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ και

ιι) $g'(0)-2=0$.

α) Να αποδείξετε ότι $g'(x)-2g(x)+4x=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=\dfrac{\left(g(x)-(2x+1)\right)}{e^{2x}}$ είναι σταθερή .

γ) Να βρεθεί ο τύπος της g .

δ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^\nu\cdot\eta\mu\left(g^{-2}(x)\right)\right)$ όπου $\nu\in\mathbb{N}^*$.

ε) Αν η g εκφράζει τον ρυθμό αύξησης του κέρδους μιας εταιρείας που παράγει x χιλιάδες μονάδες ενός προϊόντος να βρείτε την μεταβολή του κέρδους όταν παραγωγή της εταιρείας μεταβληθεί από 7000 σε

10000 μονάδες προϊόντος

.

Ενδεικτική Λύση.

α) Θέτουμε x=y=0 στην (1) και έχουμε

$$g^2(0)-2g(0)=g(0)-2 \Leftrightarrow g^2(0)-3g(0)+2=0 \Leftrightarrow$$

$$g(0)=1 \text{ ή } g(0)=2.$$

παραγωγίζουμε την (1) ως προς y και έχουμε :

$$\left(g(x)g(y)-2g(xy)\right)'=\left(g(x+y)-2\right)' \Rightarrow$$

$$g(x)g'(y)-2g'(xy)(xy)'=g'(x+y)(x+y)' \Rightarrow$$

$$g(x)g'(y)-2xg(xy)=g'(x+y)$$

Θέτουμε $y=0$ οπότε έχουμε :

$$g(x)g'(0)-2xg'(0)=g'(x) \Leftrightarrow 2g(x)-4x=g'(x).$$

β) Αρκεί $h'(x)=0$. Οπότε :

$$h'(x)=\left(\frac{g(x)-(2x+1)}{e^{2x}}\right)'$$

$$=\frac{(g'(x)-2)e^{2x}-(g(x)-2x-1)2e^{2x}}{e^{4x}}$$

$$=\frac{g'(x)-2-2g(x)+4x+2}{e^{2x}}$$

$$=\frac{g'(x)-2g(x)+4x}{e^{2x}}=0$$

γ) Από το ερώτημα β) προκύπτει ότι $h(x)=c$ Άρα $\dfrac{g(x)-2x-1}{e^{2x}}=c$ και για $x=0$ έχουμε $g(0)=1$ (αφού $g(0)=2$ απορρίπτεται διότι $g'(0)=2$ από υπόθεση) Άρα $c=0 \Leftrightarrow g(x)=2x+1$

.

δ) Από το ερώτημα γ) έχουμε :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^{\nu}\eta\mu\left(g(x)^{-2}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x^{\nu}\eta\mu\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\nu}}{(2x+1)^{2}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\left(\frac{1}{2\chi+1}\right)^{2}}{\left(\frac{1}{2\chi+1}\right)^{2}}=$$

$$=\begin{cases}0,\ \alpha\nu\ \nu=1\\ \frac{1}{4},\ \alpha\nu\ \nu=2\\ +\infty,\ \alpha\nu\ \nu>2\end{cases}$$

ε) ε) $g(x)=2x+1$ άρα η παράγουσα της είναι $G(x)=x^{2}+x+c$ και η μεταβολή του κέρδους είναι : $G(10)-G(7)=10^{2}+10+c-7^{2}-7-c=56$

.

■

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ : ΑΝΤΩΝΗΣ ΜΑΛΛΙΑΡΑΚΗΣ