ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ 2024

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο **ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ**

Πρόταση 1

Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι ¨1-1¨ συνάρτηση .
Το αντίστροφο ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x, & \text{αν } x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{αν } x>0 \end{cases}$ είναι ¨1-1¨ συνάρτηση ενώ δεν είναι γνησίως μονότονη.

Πρόταση 2

Μια συνάρτηση f μπορεί να είναι ¨1-1¨ σε διάφορα υποσύνολα του πεδίου ορισμού της αλλά να ΜΗΝ είναι ΄1-1΄ σε όλο το πεδίο ορισμού της.

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x-5 & , \text{αν } x\ge 3 \\ -x+1, & \text{αν } x<3 \end{cases}$ έχει πεδίο ορισμού το R και ενώ είναι ¨1-1¨ σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,3)$ και $[3,+\infty)$ **ΔΕΝ** είναι ¨1-1¨ στο πεδίο ορισμού της αφού $f(5)=f(1)=0$!

ΠΡΟΣΟΧΗ

1. Μια συνάρτηση f που είναι ¨1-1¨ σε διάφορα υποσύνολα του πεδίου ορισμού της θα **ΕΙΝΑΙ** ΄1-1΄ σε όλο το πεδίο ορισμού της μόνο αν τα σύνολα τιμών των επιμέρους κλάδων είναι ΞΕΝΑ μεταξύ τους. (Παρατηρήστε ότι στο προηγούμενο παράδειγμα το $f\left((-\infty,3)\right)=(-2,+\infty)$ και $f\left([3,-\infty]\right)=[-2,+\infty)$ και $f\left((-\infty,3)\right)\cap f\left([3,+\infty)\right)=(-2,+\infty)\neq\varnothing$

2. Μια συνάρτηση f με πολλούς κλάδους αντιστρέφεται μόνο όταν
i)Κάθε κλάδος της είναι "1-1" και
ii)Τα σύνολα τιμών των επιμέρους κλάδων είναι ξένα μεταξύ τους

Πρόταση 3

Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των C_f *και* $C_{f^{-1}}$ ΔΕΝ **βρίσκονται πάντα πάνω στη διχοτόμο** $y=x$ **.**

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{αν } x\neq 0 \\ 0, & \text{αν } x=0 \end{cases}$ η οποία είναι 1-1 και η

αντίστροφη της είναι $f^{-1}(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{αν } x\neq 0 \\ 0, & \text{αν } x=0 \end{cases}$.Συνεπώς η εξίσωση

$f(x)=f^{-1}(x)$ **(1)** αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ενώ η εξίσωση
$f(x)=x$ **(2)**
αληθεύει μόνο για $x=-1,0,1$ άρα οι εξισώσεις **(1)** και **(2)**
δεν είναι ισοδύναμες.

ΠΡΟΣΟΧΗ

Μόνο αν η f γνησίως αύξουσα συνάρτηση τα κοινά σημεία της C_f *και* $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται πάνω στην $y=x$.
(Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση του προηγούμενου παραδείγματος δεν είναι γνησίως αύξουσα.)

Πρόταση 4

Αν μια συνάρτηση f ΔΕΝ είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της τότε η f ΔΕΝ σημαίνει ότι δεν αντιστρέφεται.

Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x+3, & \text{αν } -2<x<-1 \\ x, & \text{αν } -1\leq x\leq 0 \end{cases}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα

σε καθένα από τα διαστήματα $(-2,-1)$ και $[-1,0]$ αλλά ΔΕΝ είναι γνησίως αύξουσα στο

(-2,0] ενώ αντιστρέφεται με $f^{-1}(x)=\begin{cases} x-3, & \text{αν } 1<x<2 \\ x, & \text{αν } -1\leq x\leq 0 \end{cases}$

Πρόταση 5

Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=1$ τότε **ΔΕΝ** ισχύει υποχρεωτικά ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-1$

Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-1, & \text{αν } x\le 0\\ 1, & \text{αν } x>0\end{cases}$

Το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει αφού $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$ ενώ η συνάρτηση $|f|$ **είναι η** $|f(x)|=1$ για κάθε $x\in R$ **με** $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=1$

<u>Πρόταση 6</u>

Αν οι συναρτήσεις $f\pm g, f\cdot g, \dfrac{f}{g}, |f|$ είναι συνεχείς στο x_0 τότε δεν σημαίνει πάντα, ότι οι f, g είναι συνεχείς στο x_0 .

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}2 & \text{, αν } x\ge 0\\ -2 & \text{, αν } x<0\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}-2 & \text{, αν } x\ge 0\\ 2 & \text{, αν } x<0\end{cases}$.

Το πεδίο ορισμού είναι το R και για τις δύο συναρτήσεις.
Οι συναρτήσεις f και g δεν είναι συνεχείς στο σημείο x_0 επειδή
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0-} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)\neq \lim\limits_{x\to 0-} g(x)$

ενώ $(f+g)(x)=0$ για κάθε $x\in R$ και είναι συνεχής σε όλο το R

<u>Πρόταση 7</u>
Το αντίστροφο του θεωρήματος Bolzano ΔΕΝ ισχύει.

<u>Παράδειγμα</u>
Η συνάρτηση $f(x)=x^2$ είναι
- Συνεχής στο διάστημα [-2,4] $\subseteq \mathbb{R}$
- $f(-2)f(4)>0$

Ενώ για τον αριθμό $x_0=0$ ισχύει $f(0)=0$!

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 **ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ**

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Πρόταση 1

Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x_0 \in D_f$ αν

- **υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός**

ή ισοδύναμα

- **υπάρχει** το όριο $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ και είναι **πραγματικός αριθμός**
- **υπάρχει** το όριο $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+\lambda h)-f(x_0)}{\lambda h}$, $\lambda \neq 0$ και είναι **πραγματικός αριθμός**

ή ισοδύναμα

- **υπάρχει** το όριο $\lim\limits_{h \to 1} \dfrac{f(x_0 \cdot h)-f(x_0)}{x_0(h-1)}$, $x_0 \neq 0$ και είναι **πραγματικός αριθμός**

Πρόταση 2

Α)Αν θεωρήσουμε $x=S(t)$ τη συνάρτηση θέσης ενός κινητού τότε η στιγμιαία ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 δίνεται από τη σχέση $u(t_0)=S'(t_0)$.
Δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της θέσης S του κινητού ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 μας δίνει την ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t_0.

Και α) όταν το κινητό κινείται προς τα **δεξιά** τότε κοντά στο t_0 θα ισχύει $\dfrac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}>0$ δηλαδή $u(t_0)\geq 0$.

β) όταν το κινητό κινείται προς τα **αριστερά** τότε κοντά στο t_0 θα ισχύει $\dfrac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}<0$ δηλαδή $u(t_0)\leq 0$.

Β) Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας u του κινητού ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 μας δίνει την επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t_0.Δηλαδή $a(t_0)=u'(t_0)=S''(t_0)$

<u>Πρόταση 3</u>

Οι κανόνες παραγώγισης εφαρμόζονται μόνο σε ανοικτά διαστήματα.
Αν η συνάρτηση f ορίζεται σε διάστημα της μορφής [α,β] ή (α,β] ή [α,β], τότε

α) υπολογίζουμε την f' στο (α,β) με κανόνες παραγώγισης και
β) με χρήση του <u>ορισμού</u> εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στα άκρα α ή β στα οποία ορίζεται.

<u>Πρόταση 4</u>

Η συνάρτηση $f \pm g$ ή $f \cdot g$ ή $\dfrac{f}{g}$ **μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ενώ τουλάχιστον μια από τις συναρτήσεις f,g μπορεί να ΜΗΝ είναι παραγωγίσιμες x_0**

Π.χ. Οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & \text{αν } x \ge 0\\ 0, & \text{αν } x<0\end{cases}$ **και** $g(x)=\begin{cases}x-\sqrt{x}, & \text{αν } x \ge 0\\ x, & \text{αν } x<0\end{cases}$

Δεν είναι παραγωγίσιμες στο $x_0=0$ (εξετάστε το) ενώ η συνάρτηση $(f+g)(x)=x$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

<u>Πρόταση 5</u>

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$ τότε δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η $f \circ g$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0

Π.χ. $g(x)=x^2$ και $f(x)=|x|$.
Η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ ενώ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)=g(0)=0$ αλλά η $(f \circ g)(x)=f(g(x))=|x^2|=x^2$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

<u>Πρόταση 6</u>

Αν μια συνάρτηση f **ορίζεται σε ένα διάστημα Δ, αντιστρέφεται και η f^{-1} <u>είναι παραγωγίσιμη στο</u> $f(\Delta)$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε:**

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)},\ x \in \Delta$$

Πράγματι: Για κάθε $x \in \Delta$ **ισχύει** $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$ **επομένως**

$$\left[f\left(f^{-1}(x)\right)\right]'=(x)' \Leftrightarrow f'\left(f^{-1}(x)\right)\left(f^{-1}(x)\right)'=1 \overset{f'(x)\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}, x \in f(\Delta)$$

<u>Πρόταση 7</u>

α) Αν μια συνάρτηση f είναι άρτια και παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της τότε η f' είναι περιττή

β) Αν μια συνάρτηση f είναι περιττή και παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της τότε η f' είναι άρτια

Πράγματι:

α) αφού η f είναι άρτια και παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της τότε για κάθε x στο πεδίο

ορισμού της θα ισχύει : $f(x)=f(-x)$ δηλαδή

$$f'(x)=\left(f(-x)\right)' \Leftrightarrow f'(x)=-f'(-x)$$

δηλαδή f' περιττή .

β) ομοίως.

<u>Πρόταση 8</u>

<u>Συνθήκες εφαπτομένης</u>

Α<u>) Ευθεία που εφάπτεται σε γραφική παράσταση συνάρτησης</u>

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο Δ.

α) Η ευθεία ε: $y=ax+\beta$ εφάπτεται στην C_f αν και μόνο αν

υπάρχει $x_0 \in \Delta$ τέτοιο ώστε $\begin{cases} f(x_0)=\alpha x_0+\beta \text{ και} \\ f'(x_0)=\alpha \end{cases}$

β) Η C_f εφάπτεται στον άξονα x΄x αν και μόνο αν υπάρχει $x_0 \in \Delta$

τέτοιο ώστε $\begin{cases} f(x_0)=0 \text{ και} \\ f'(x_0)=0 \end{cases}$

Β<u>) Κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g σε κοινό σημείο</u>

Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f και g στο x_0

Η ευθεία ε θα είναι κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g στο x_0

αν και μόνο αν ισχύει: $\begin{cases} f(x_0)=g(x_0) \text{ και} \\ f'(x_0)=g'(x_0) \end{cases}$

Γ) <u>Κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g σε διαφορετικά σημεία</u>

Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f και g στο Δ.

Η ευθεία ε θα είναι κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g αν και μόνο αν υπάρχουν σημεία

$\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$ *και* $\mathrm{B}(\beta, g(\beta))$ με $\alpha,\beta \in \Delta$ τέτοια ώστε

$\begin{cases} f'(\alpha)=g'(\beta) \text{ και} \\ \text{η εφαπτομένη της } C_f \text{ } \textit{στο } x_0=\alpha \text{ να διέρχεται από το B} \end{cases}$

<u>Πρόταση 9</u>

Για να βρούμε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=\sqrt[\nu]{x^{\mu}}$ γράφουμε:

α) αν μ περιττός $D_f=[0,+\infty)$ και $f(x)=x^{\frac{\mu}{\nu}}$

β) αν μ άρτιος $D_f=\mathbb{R}$ και $f(x)=|x|^{\frac{\mu}{\nu}}=\begin{cases} x^{\frac{\mu}{\nu}} & \text{, αν x} \geq 0 \\ (-x)^{\frac{\mu}{\nu}} & \text{, αν x<0} \end{cases}$

<u>Πρόταση 10</u>

Αν δυο μεγέθη x,y συνδέονται με τη σχέση $y=f(x)$ και f παραγωγίσιμη ως προς x τότε :

α) Αν το y **αυξάνεται** ως προς x με ρυθμό α εννοούμε ότι $f'(x)=\alpha>0$

β) Αν το y μειώνεται ως προς x με ρυθμό α εννοούμε ότι $f'(x)=-\alpha<0$ με α>0

<u>Πρόταση 11</u>

Ανάμεσα σε δύο διαφορετικές ρίζες μια συνάρτησης f υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα για την f' όταν η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα των ριζών αυτών.

<u>Πρόταση 12</u>

Ερμηνεία του θεωρήματος Μέσης τιμής στη Φυσική

Κατά την ευθύγραμμη κίνηση ενός κινητού στο διάστημα $[t_1,t_2]$ υπάρχει μια τουλάχιστον χρονική στιγμή $t_0\in(t_1,t_2)$ τέτοια ώστε η ταχύτητα του κινητού να ισούται με τη μέση ταχύτητα του.

<u>Πρόταση 13</u>

Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής στο [α,β] τότε αν α) $f(\alpha)<f(\beta)$ θα υπάρχει αριθμός $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $f'(\xi)>0$, δηλαδή η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ θα έχει **θετικό** συντελεστή διεύθυνσης οπότε η γωνία που θα σχηματίζει με τον x΄x θα είναι **οξεία**.

β) $f(\alpha)>f(\beta)$ θα υπάρχει αριθμός $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $f'(\xi)<0$, δηλαδή η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ θα έχει **αρνητικό** συντελεστή διεύθυνσης οπότε η γωνία που θα σχηματίζει με τον x΄x θα είναι **αμβλεία**.

Πρόταση 14

Οι συνέπειες του θεωρήματος Μέσης Τιμής δεν ισχύουν σε ένωση διαστημάτων (ισχύουν όμως σε κάθε διάστημα ξεχωριστά)

Αντιπαράδειγμα Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1 & ,\ x<0\\ -1, & x>0\end{cases}$. Αν και η $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

Πρόταση 15

Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f'(x)+g(x)f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη με $e^{G(x)}$ όπου $G'(x)=g(x)$ έχουμε,

$$e^{G(x)}f'(x)+g(x)e^{G(x)}f(x)=0 \Leftrightarrow e^{G(x)}f'(x)+G'(x)e^{G(x)}f(x)=0$$

$$e^{G(x)}f'(x)+\left(e^{G(x)}\right)'f(x)=0 \Leftrightarrow \left(e^{G(x)}f(x)\right)'=0$$

Από όπου προκύπτει $e^{G(x)}f(x)=c, c\in\mathbb{R}$ δηλαδή $f(x)=\dfrac{c}{e^{G(x)}}$ για κάθε $x\in R$

Προσοχή ! Αν δίνεται η σχέση ως $g(x)f'(x)+f(x)=0$ και $g(x)\neq 0$ τη μετασχηματίζουμε σε $f'(x)+\dfrac{1}{g(x)}f(x)=0$

Πρόταση 16

Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει $f'(x)=g'(x)$ για κάθε $x\in\Delta_1\cup\Delta_2$, τότε θα υπάρχουν σταθεροί αριθμοί $c_1, c_2\in\mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $f(x)=\begin{cases}g(x)+c_1 & \text{για } x\in\Delta_1\\ g(x)+c_2 & \text{για } x\in\Delta_2\end{cases}$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : ΑΝΤΩΝΗΣ ΜΑΛΛΙΑΡΑΚΗΣ