

ΘΕΜΑ Α

A1) Δίνεται η συνάρτηση :  $f(x) = x$ . Να αποδείξετε ότι  $f'(x) = (x)' = 1$ . (Μονάδες 5)

A2) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και Λ αν είναι λανθασμένες .

- Ο αριθμός των εργαζόμενων σε μια τράπεζα είναι συνεχής ποσοτική μεταβλητή.
- Η μέση τιμή αποτελεί μέτρο διασποράς.
- Ισχύει ότι  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .
- Η  $f(x) = (x + 1)^3$  είναι γνησίως φθίνουσα.
- Αν για μια συνάρτηση  $f$  ισχύουν  $f'(x_0) = 0$  για  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ,  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε η  $f$  παρουσιάζει στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , για  $x = x_0$  μέγιστο. (Μονάδες 8)

A3) Να συμπληρώσετε τα

παρακάτω κενά :

α)  $(\sin 3x)' = \dots\dots\dots$

β)  $(\frac{1}{x})' = \dots\dots\dots$

γ)  $(\sqrt{x})' = \dots\dots\dots$

δ)  $(f(g(x)))' = \dots\dots\dots$  (Μονάδες 8)

A4) Πότε μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέγεται συνεχής ;(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Β

Εξετάσαμε ένα δείγμα οικογενειών στην πόλη της Κοζάνης ως προς τον αριθμό των αυτοκινήτων που η κάθε μία διαθέτει . Από τις απαντήσεις που δόθηκαν προέκυψε ο παρακάτω πίνακας :

$x_i$	$v_i$	$f_i$	$N_i$	$f_i\%$	$F_i\%$
0	κ			x	
1				x+10	

2				$x^2-8x$	
3				$2x$	
4				$x+20$	
Σύνολο					

Όπου  $\kappa = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-4)}{x-2}$ .

B1) Να βρείτε το  $x$  και έπειτα να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα. (12 Μονάδες)

B2) Ποιο είναι το πλήθος των οικογενειών που έχει το πολύ 3 αυτοκίνητα; (Μονάδες 7)

B3) Ποιο είναι το ποσοστό των οικογενειών που έχει τουλάχιστον 2 αυτοκίνητα.  
(Μονάδες 6)

## ΘΕΜΑ Γ

Στο μάθημα των μαθηματικών δέκα μαθητές έγραψαν τους παρακάτω βαθμούς : 10 , 12+ $\lambda$  , 7 , 3 $\lambda$  + 2 , 14 , 2 +  $\lambda$  , 5 ,  $\lambda$  + 7 , 8 , 11 + 2 $\lambda$

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x^2 + 5} - 3}$$

α) Να βρείτε  $\lambda$ . (Μονάδες 4)

β) Για  $\lambda = 3$  να υπολογίσετε :

Το εύρος των βαθμών. (Μονάδες 4)

Την μέση τιμή των βαθμών των μαθητών. (Μονάδες 4)

Την διάμεσο  $\delta$ . (Μονάδες 4)

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Δ1) Να αποδείξετε ότι  $f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ . (Μονάδες 7).

# ΚΥΚΛΟΣ

Δ2) β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 8)

Δ3) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της  $f$  στο  $x_0 = 1$  είναι παράλληλη στην ευθεία  $\zeta : y = \frac{1}{2}x + 5$ . (Μονάδες 6).

Δ4) Να βρείτε το όριο  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$ . (Μονάδες 4).

παντήσεις

ΘΕΜΑ Α

A1]  $f(x+h) - f(x) = (x+h) - x = x - h - x = -h$ .

Για  $h \neq 0$   $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{-h}{h} = -1$ .

Επομένως  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -1$ .

A2] i) Λάθος ii) Λάθος iii) Λάθος iv) Λάθος v) Σωστό

A3] A)  $-3\eta\mu 3x$

B)  $\frac{-1}{x^2}$

Γ)  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Δ)  $f'(g(x)) g'(x)$

A4] Μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$  λέγεται συνεχής στο  $x_0$ , αν για κάθε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

ΘΕΜΑ Β

$$\kappa = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \kappa = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \kappa = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4.$$

$x_i$	$v_i$	$f_i$	$N_i$	$f_i\%$	$F_i\%$
0	4	0,1	4	10	10
1	8	0,2	12	20	30
2	8	0,2	20	20	50
3	8	0,2	28	20	70

4	12	0,3	40	30	100
Σύνολο	40	1		100	

Πρέπει  $f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% + f_5\% = 100$ .

Άρα  $x + x + 10 + x^2 - 8x + 2x + x + 20 = 100$ .

Άρα  $x^2 - 3x - 70 = 0$ .

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \Rightarrow \Delta = 9 + 280 = 289$$

$$x_1 = 10, x_2 = -7.$$

Η  $f_i \geq 0$ . Επομένως η μόνη δεκτή λύση είναι  $x=10$ .

Για να βρω  $F_i$  θα χρησιμοποιήσω  $F_1\% = f_1\%$  και  $F_i\% = F_{i-1}\% + f_i\%$

$$F_1\% = f_1\% = 10$$

$$F_2\% = F_1\% + f_2\% = 10 + 20 = 30$$

$$F_3\% = F_2\% + f_3\% = 30 + 20 = 50$$

$$F_4\% = F_3\% + f_4\% = 50 + 20 = 70$$

$$F_5\% = F_4\% + f_5\% = 70 + 30 = 100$$

$$\text{Από } f_i = \frac{v_i}{v} \quad i=1,2,3,4,5$$

$$\text{έχω ότι: } f_1 = 0,1, \quad f_2 = 0,2, \quad f_3 = 0,2, \quad f_4 = 0,2, \quad f_5 = 0,3, \quad v=40$$

$$N_1 = v_1 = 4 \cdot N_1 = v_1 = 4.$$

Από την σχέση

$$N_i = N_{i-1} + v_i \quad N_i = N_{i-1} + v_i \quad \text{θα βρω τα υπόλοιπα } N_i.$$

B2] Το πολύ 3 αυτοκίνητα σημαίνει μέχρι και 3. Οπότε το ζητούμενο μας είναι  $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 4 + 8 + 8 + 8 = 28$ . Άρα 28 οικογένειες έχουν το πολύ 3 αυτοκίνητα.

B3] Τουλάχιστον δύο σημαίνει από δυο και πάνω. Οπότε αφού θέλω ποσοστό θα πάρω  $f_3 + f_4 + f_5 = 0,2 + 0,2 + 0,3 = 0,7$ . Άρα το ποσοστό είναι  $0,7 \cdot 100 = 70$ . Άρα το ποσοστό είναι 70%.

ΘΕΜΑ Γ

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x^2 + 5} - 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)}{(\sqrt{x^2 + 5} - 3)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)}{(\sqrt{x^2 + 5})^2 - 3^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)}{x^2 + 5 - 9} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(\sqrt{x^2 + 5} + 3)}{x+2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

β) Για  $\lambda=3$  οι παρατηρήσεις μου γίνονται : 10, 15, 7, 11, 14, 5, 5, 10, 8, 17.

i) Το εύρος είναι ίσο με :  $R = \text{μεγαλύτερο βαθμό} - \text{τον μικρότερο βαθμό}$  . Άρα  $R = 17 - 5 = 12$ .

$$\text{ii) } \mu = \frac{10+15+7+11+14+5+5+10+8+17}{10} = 10,2 .$$

iii) Ταξινομώ : 5,5,7,8,10,10,11,14,15,17 .

Τώρα θα βρω διάμεσο :  $n=10$  άρα πλήθος άρτιο επομένως ο τύπος της διαμέσου είναι :

$$\delta = \frac{\frac{tv}{2} + \frac{tv+1}{2}}{2} = 10$$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1] f'(x) = \frac{(x^2)'(x^2+1) - x^2(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\Delta 2) \text{Λύνω } f'(x) = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Η  $f$  γνησίως φθίνουσα για  $x \in (-\infty, 0]$  και  $f$  γνησίως αύξουσα για  $x \in [0, +\infty)$  . Για  $x=0$  έχω θέση ελάχιστου με ελάχιστο την τιμή  $f(0) = 0$ .

$$\Delta 3) \text{Αρκεί να δείξω ότι } f'(1) = \frac{1}{2} .$$

$$\text{Πράγματι } f'(1) = \frac{2 \cdot 1}{(1^2+1)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} .$$

$\Delta 4)$  Απο τον ορισμό της παραγώγου καταλαβαίνουμε ότι το ζητούμενο είναι :  $f'(-1)$

$$\text{Με } f'(-1) = \frac{-1}{2} .$$

Επιμέλεια : Μπλεόνα Σκεντέρι