ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΘΕΜΑ Α
Α1. Σχολικό σελ. 76
Α2. Σχολικό σελ. 155
Α3. Σχολικό σελ. 216
Α4. α)Σ β)Σ γ)Λ δ)Λ ε)Σ

ΘΕΜΑ Β
Β1. $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, με $A_{g\cap h} = [1,+\infty)$ $και$ $h(x) \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

Οπότε $A_f = (1,+\infty)$ και $f(x) = \frac{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{x+1}{x-1}$ $, x > 1$

$A_r = A_{g\cap h} = [1,+\infty)$ και $r(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = x - \frac{1}{x}$ $, x \geq 1.$

Β2. $f'(x) = \frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2} < 0.$ Οπότε f γνησίως φθίνουσα ,άρα 1-1 και αντιστρέψιμη.

$A_{f^{-1}} = f(A) = (\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to1^+} f(x)) = (1,+\infty)$, διότι

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$

$\lim_{x\to1^+} \text{f(x)} = \lim_{x\to1^+} \left(\frac{1}{x-1}\right) \cdot (x+1) = +\infty$

Για την αντίστροφη θα λύσουμε $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow y(x-1) = x+1 \Leftrightarrow$ $x = \frac{1+y}{y-1}$. Οπότε , $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$ $, x > 1$.

Άρα $f = f^{-1}$, διότι έχουν ίδιο τύπο και ίδιο πεδίο ορισμού.

Β3.

Κατακόρυφη Ασύμπτωτη :

$$\lim_{x\to1^+} r(x) = \lim_{x\to1^+} \left(x - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

Επομένως δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο 1.

Οριζόντια ασύμπτωτη :

$$\lim_{x\to-\infty} r(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(x - \frac{1}{x}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} r(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

Επομένως δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο +∞ και - ∞ αντίστοιχα .

Πλάγια ασύμπτωτη είναι της μορφής : y = λx + β

$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{r(x)}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-\frac{1}{x}}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) = 1$

$\lim_{x\to+\infty}(r(x)-\lambda x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{x}-x\right) = 0$.
Άρα πλάγια ασύμπτωτη στο +∞ : y = x .

B4.

$\left(f^{-1}(f(x))\right) = 1 + 4r(x) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow (x^3 = x + 4x^2 - 4) \Leftrightarrow$
$(x^3 - 4x^2 - x + 4) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-4) - (x-4) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2-1) = 0$
$x = 4$ ή $x = +1$ ή $x = -1$.

Δεκτές λύσεις : 4
Μη αποδεκτή λύση : x = -1, x=1 ,εκτός πεδίου ορισμού .

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $0 \le x < 2$, f συνεχής ως πολυωνυμική.
Για $x > 2$ f συνεχής ως πολυωνυμική.
Για $x = 2$: $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$
$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(-2x+4+e^{\lambda}\right) = e^{\lambda}$ και $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(-x^2+4x-3+\lambda) = 1+\lambda$
Άρα , $e^{\lambda} = 1+\lambda$. Θέτω $\varphi(x) = e^x - x - 1, x \in R$. Οπότε , $\varphi'(x) = e^x - 1$, $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ και $\varphi'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$.
Οπότε η φ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 0 το $\varphi(0) = 0$ και $\varphi(x) \ge \varphi(0)$, οπότε η φ έχει μοναδική ρίζα το $x = 0$, άρα λ = 0.

Γ2. Ο τύπος γίνεται $f(x) = \begin{cases} -2x+5, & 0 \le x < 2 \\ -x^2+4x-3, & x \ge 2 \end{cases}$
Για $0 \le x < 2$, f παρ/μη ως πολυωνυμική με $f'(x) = -2 < 0$
Για $x > 2$, η f είναι παρ/μη ως πολυωνυμική με $f'(x) = -2x+4$
Λύνουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x+4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,2] και στο $[2,+\infty)$, f συνεχής στο $x_0 = 2$, άρα η f ειναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

Γ3. i) f συνεχής στο [0,3] αλλά η f δεν είναι παρ/μη στο 2, άρα η f δεν είναι παρ/μη στο (0,3).

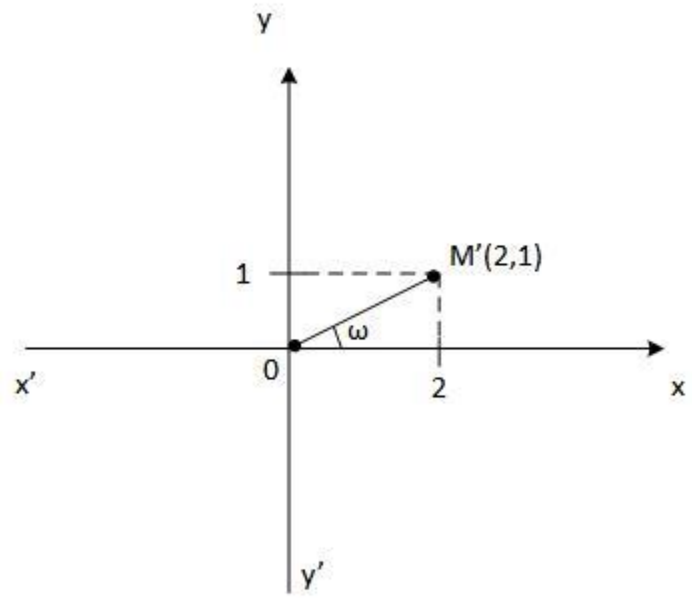
ii) Η ευθεία που διέρχεται από τα $Δ(0, f(0))$, $E(3, f(3))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $λ = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-5}{3-0} = -\frac{5}{3}$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $(ξ, f(ξ))$: $y - f(ξ) = f'(ξ)(x - ξ)$.

Πρέπει $f'(ξ) = -\frac{5}{3}$.

Για $0 \le x < 2$, $f'(x) = -2 < 0$. Άρα για $x > 2$: $f'(x) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -2x + 4 = -\frac{5}{3}$
$\Leftrightarrow x = \frac{17}{3} \in (2, +\infty)$. Οπότε $ξ = \frac{17}{6}$

Γ4. Το Μ(2,0) κινείται στην $x = 2$ και θα συναντήσει την C_f στο $M'(2,1)$.
Άρα $υ = 0{,}5$, οπότε $y'(t) = 0{,}5$.
$εφ(ω(t)) = \frac{MA}{OA} = \frac{y(t)}{2}$. Παραγωγίζοντας τη σχέση : $\frac{ω'(t)}{συν^2(ω(t))} = \frac{y'(t)}{2}$.
Για $t = t_0$: $\frac{ω'(t_0)}{συν^2(ω(t_0))} = \frac{y'(t_0)}{2} \Leftrightarrow \left(1 + εφ^2(ω(t_0))\right) ω'(t_0) = \frac{y'(t_0)}{2} \Leftrightarrow$
$\left(1 + \frac{1}{4}\right) ω'(t_0) = \frac{0{,}5}{2} \Leftrightarrow ω'(t_0) = 0{,}2\, rad/s$,
διότι $εφ^2(ω(t_0)) = \left(\frac{MA}{OA}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.



ΘΕΜΑ Δ

Δ1 .

f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων .

$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}+a\right)x-1(\ln x+ax)}{x^2} = \frac{1+ax-\ln x-ax}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \ln e \Leftrightarrow x = e$$

$1-\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e \Leftrightarrow x = e$
$x^2 > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Για $x \in (0, e)$, $f'(x) < 0$ άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(0, e)$.
Για $x \in (e, +\infty)$, $f'(x) < 0$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $(e, +\infty)$.
Επομένως $x = e$, θέση ολικού μεγίστου με ολικό μέγιστο το :
$f(e) = \frac{\ln e+ae}{e} = \frac{\ln e+ae}{e} = \frac{1+a}{e}$
Από σύνολο τιμών : $f(e) = 1 + \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1}{e}+a = 1+\frac{1}{e} \Leftrightarrow a = 1$.

Δ2. $f(x) = \frac{\ln x+x}{x}$, $x > 0$. Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{\ln\frac{1}{2}+\ln\sqrt{e}}{2} = \frac{\ln\frac{\sqrt{e}}{2}}{2} < 0$, διότι $\ln\frac{\sqrt{e}}{2} < \ln 1 = 0$, $f(1) = 1 > 0$, οπότε $f\left(\frac{1}{2}\right)f(1) < 0$ άρα ικανοποιείται το Θεώρημα Bolzano και υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(\frac{1}{2}, 1)$ και λόγω μονοτονίας, μοναδική.

Δ3. i) $f(x) = f(4)$
$f(2) = \frac{\ln 2+2}{2}$, $f(4) = \frac{\ln 4+4}{4} = \frac{2\ln 2+4}{4} = \frac{\ln 2+2}{2} = f(2)$
Άρα το $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$ είναι λύσεις της f(x)=4.
$\varphi(x) = f(x) - f(4)$, $\varphi'(x) = f'(x)$.
Η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(o, e]$, οπότε η $x_1 = 2$ μοναδική ρίζα στο διάστημα και φ γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$, οπότε $x_2 = 4$ μοναδική ρίζα στο διάστημα.

ii)

$$2^x \leq x^2 \Leftrightarrow \ln 2^x \leq \ln x^2 \Leftrightarrow x\ln 2 \leq 2\ln x \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} \leq \frac{\ln x}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2}+1 \leq \frac{\ln x}{x}+1 \Leftrightarrow f(2) \leq f(x)$$

$$f(2) = f(4) \leq f(x)$$

Από μονοτονία της φ :
φ: γν. αύξουσα στο (0,e] και φ(2)=0 , άρα φ(χ) ≥ 0 για x∈ $[2, e]$
φ: γν. φθίνουσα στο [e,+∞) και φ(4)=0 , άρα φ(χ)≥ 0 $για\ x \in [e, 4]$

Άρα , $\varphi(x) = f(x) - f(2) \geq 0$, για κάθε x∈ [2,4]

Δ4. Ε(Ω) = $\int_{-ln2}^{0} |g(x)| dx = \int_{-ln2}^{0} \left| f(e^x) \frac{1-x}{e^x} \right| dx$
Θέτουμε: u = $e^x \Leftrightarrow x = lnu \Leftrightarrow dx = (lnu)' du \Leftrightarrow dx = \frac{1}{u} du$
Για x = -ln2 : $u_1 = e^{-ln2} = \frac{1}{2}$
Για x = 0 : $u_2 = e^0 = 1$

τότε : Ε(Ω) = $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left| f(u) \frac{1-lnu}{u} \right| \frac{1}{u} du = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left| f(u) \frac{1-lnu}{u^2} \right| du = \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f(u) f'(u)| du$
Απο Δ2. $\frac{1}{2} \leq x \leq x_0 \overset{f:\nearrow}{\Rightarrow} f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow f(x) \leq 0$
$x_0 \leq x \leq 1 \overset{f:\nearrow}{\Rightarrow} f(x_0) \leq f(x) \leq f(1) \Rightarrow f(x) \geq 0$

τότε : Ε(Ω) $= -\int_{\frac{1}{2}}^{x_0} f(u) f'(u) du + \int_{x_0}^{1} f(u) f'(u) du = -\left[\frac{f^2(u)}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{x_0} + \left[\frac{f^2(u)}{2}\right]_{x_0}^{1} =$
$-\frac{f^2(x_0)}{2} + \frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2} + \frac{f^2(1)}{2} + \frac{f^2(x_0)}{2} = \frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2} + \frac{f^2(1)}{2}$, διότι : $f(x_0) = 0$

Έτσι , Ε(Ω) = $\frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2} + \frac{f^2(1)}{2} = 2ln^2 2 - 2ln2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2ln^2 2 - 2ln2 + 1$

Επιμέλεια:
Μαλλιαράκης Αντώνης.
Φαρσάρη Ρένια
Δασκαλάκη Δήμητρα.
Σκεντέρι Μπλέονα.
Κλαμπατσέας Χρήστος
Τσιχλάκης Σπύρος
Μαθηματικοί, Φροντιστήριο Κύκλος, Γάζι